

Л. ЭЙЛЕР

ИЗБРАННЫЕ
КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ
СТАТЬИ

Л. ЭЙЛЕР



ИЗБРАННЫЕ
КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ
СТАТЬИ

*Под общей редакцией
С. Т. Судакова*

ИЗДАТЕЛЬСТВО ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
• МОСКВА • 1959 •

Л. ЭЙЛЕР



ТРИ СТАТЬИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ

*Под редакцией
и вступительной статьей
Г. В. Багратуни*

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
Н. Ф. БУЛАЕВСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
• МОСКВА • 1959 •

A

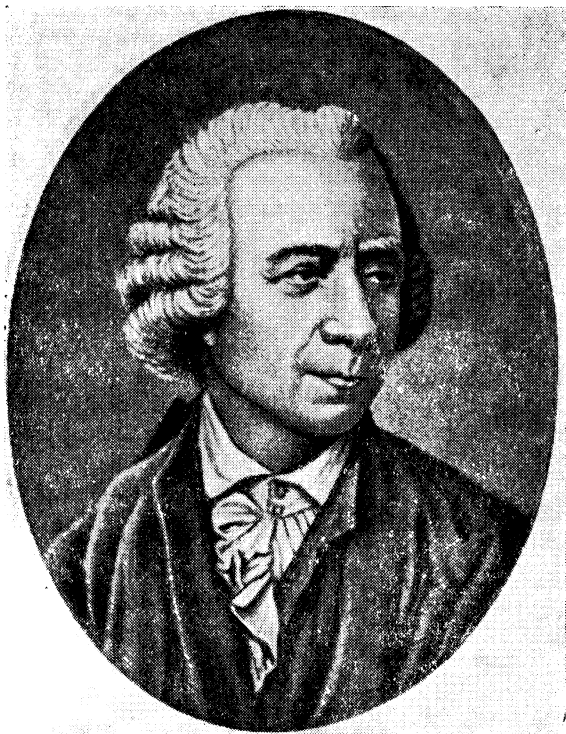
3ME
Э 322

① M

Г



1614-3-59



Л. Эйлер
(1707—1783)

ПРЕДИСЛОВИЕ

В апреле 1957 г. в СССР, ГДР и других странах было широко отмечено 250-летие со дня рождения одного из величайших математиков, механиков и физиков XVIII столетия — Леонарда Эйлера. В связи с юбилеем Академия наук СССР предприняла ряд мер по изданию избранных трудов Эйлера и выпуску сборников статей, посвященных его жизнеописанию и творчеству.

К сожалению, в числе избранных сочинений Эйлера, предназначенных к изданию, не оказалось его работы, представляющей интерес для геодезистов и картографов. Имея в виду это обстоятельство и учитывая, что в сентябре 1958 г. исполнилось 175 лет со дня смерти Эйлера, было принято решение — перевести на русский язык и издать три статьи его по математической картографии для широкого круга читателей геодезистов и картографов.

Такое решение, надо полагать, весьма целесообразно, так как статьи Эйлера написаны на латинском языке, который становится все менее доступным для современного читателя, и *Acta academiae scientiarum Petropolitanae* (Труды Петербургской академии наук), где напечатаны указанные работы Эйлера, в настоящее время являются действительно библиографической редкостью. Даже в Москве пришлось затратить много труда и времени, чтобы пользоваться тем выпуском трудов Академии, где помещены подлинники статей Эйлера.

Естественно, возникает вопрос: представляют ли интерес для современного специалиста-геодезиста и картографа статьи Эйлера, написанные 250 лет назад? В наших исторических исследованиях по высшей геодезии и математической картографии, как правило, указывается, что общее решение задачи конформного изображения поверхности шара на плоскости было дано впервые Эйлером. Следовательно, необходимо, чтобы каждый интересующийся историей развития геодезии и картографии имел возможность самостоятельно изучить этот вопрос по подлинным трудам Эйлера. Кроме того, можно привести примеры, когда научные работники, исходя из весьма многогранного общего решения Эйлера, находят частные решения, имеющие теоретическое и практическое значение в вопросах математической картографии.

Для перевода статей Эйлера мы располагали: 1-м томом «Трудов Петербургской академии наук за 1777 г.», издание 1778 г., 28-м томом *Oraa omnia* (Полного собрания трудов Эйлера, издание Швейцарского общества естествоиспытателей, 1955 г.) и 93-м выпуском «Библиотеки классиков точных наук Оствальда» за 1898 г., где помещены статьи в немецком переводе А. Вангерина, который замечает, что перевод... «не везде буквальный, но было приложено максимум стараний

передать смысл оригинала». Из сравнения этих трех источников установлено, что перевод А. Вангерина, несомненно, был выполнен с большой тщательностью, причем в формулах оригинала было обнаружено и исправлено более 50 опечаток и неточностей; сами формулы изложены в современном написании: знак корня проведен над всем подкорненным количеством, вместо aa , $\sin u^2$, $\operatorname{tg} u^2$ и т. д. написано соответственно a^2 , $\sin^2 u$, $\operatorname{tg}^2 u$ и т. д. Поэтому в основу русского перевода была взята работа А. Вангерина и внесены в нее лишь весьма незначительные изменения, приблизившие соответствующие места к латинскому оригиналу. А. Вангерин снабдил свою работу соответствующими примечаниями, из которых некоторые, как весьма ценные, сохранены в настоящем издании.

Перевод статей Эйлера с немецкого с последующим сравнением с латинским оригиналом сделан Н. Ф. Булаевским. Редактирование выполнено Г. В. Багратуни, им же составлены вступительная статья и необходимые дополнительные примечания.

Предлагаемое издание должно до некоторой степени восполнить пробел в нашей специальной литературе в отношении картографической и геодезической деятельности Эйлера.

С. Г. Судаков и Г. В. Багратуни

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

К. А. Тимирязев [1] в своей работе «Основные черты истории развития биологии в XIX столетии» охарактеризовал XIX век как эпоху точных наук — математики и физики. Это весьма справедливо, особенно в отношении анализа бесконечно малых. Величественное здание математики, воздвигнутое трудами ученых Франции, Германии, Англии и России в XIX веке, стоит на глубоком и прочном фундаменте, заложенном математиками XVIII столетия. В том же труде К. А. Тимирязев подчеркивает, что величайшим научным итогом XVIII век имел победу мысли над пережитками старины, над преданием и суеверием.

Эйлер — наиболее характерный математический гений XVIII столетия, на заре которого возвышаются фигуры таких гигантов, как Декарт, Ферма, Ньютон, Гюйгенс, Лейбниц и др., когда решение отдельных задач и проблем, главным образом прикладного характера, ставилось на первый план и явилось как бы ведущим методом развития математики. Решая эти задачи, математики одновременно развивали и двигали вперед методы нового исчисления — анализа бесконечно малых; применяли его к решению проблем из самых различных областей науки и техники и, таким образом, расширяли рамки самой математики. Парижская, Лондонская, Петербургская, Берлинская и другие академии того периода способствовали развитию математики путем выдвижения конкурсных задач по математике, физике и механике, астрономии и т. д., отвечающих жизненным требованиям того времени.

В 1714 г., по предложению И. Ньютона, английское королевское общество через парламент объявило конкурс с выдачей премии в 200 000 фунтов стерлингов (2 млн. рублей золотом) за разработку способа определения географической долготы на море с точностью до полуградуса. Путем конкурса решались такие задачи, как, например, о приливах и отливах, о теории спутников Юпитера, о теории движения Луны, о либрации Луны, об угле наклонения планетных орбит, об оснастке кораблей и т. д. Свое начало современное вариационное исчисление берет из решения знаменитой задачи о брахистохроне (кривая наиискорейшего ската).

Совершенно понятно, что в таком гигантском соревновании могли иметь успех только математические гении. Эйлер в самом начале своей деятельности включился в это соревнование с твердой уверенностью на успех, который ему обеспечивали его математическое дарование и необычайное трудолюбие. В течение 1738—1772 гг. одна только Парижская академия 12 раз премировала Эйлера за решение конкурсных задач.

Когда Эйлер вышел на научную арену, трудами Декарта, Ферма, Ньютона и Лейбница уже были заложены основы исчисления беско-

нечно малых. Но многие направления в этой области были еще в зачаточном состоянии. Нужен был своеобразный гений и огромный талант, который мог бы продолжить развитие нового исчисления, в ясной форме изложить вопросы новой теории и применить ее к решению различных задач науки и техники. Эйлер как нельзя лучше отвечал этим требованиям своего времени. Гениальный ум в нем блестяще сочетался с умением систематизировать. Многократно возвращаясь к одним и тем же вопросам с разных сторон, Эйлер добивался исключительной ясности, простоты и стройности излагаемых им сложных математических задач и проблем. Постепенно он включил в свою орбиту все области математики и стал давать новые направления ее развитию. Лаплас часто поэтому повторял своим ученикам: «Читайте Эйлера, читайте — он учитель всех нас».

Леонард Эйлер родился 15 апреля 1707 г. в семье сельского священника, в швейцарском городе Базеле. Детство Эйлера прошло в селе Риэн, близ Базеля, где его отец, Пауль Эйлер, был пастором. С раннего детства Эйлер получил хорошее воспитание от родителей, отличался спокойным характером, трудолюбием и большой наблюдательностью.

Первым учителем математики Эйлера был его отец, сам занимавшийся ею в молодости под руководством одного из первых математиков из семьи Бернулли, — Якоба Бернулли. Занятия с отцом показали большое прилежание и любовь Эйлера к математике, но в этот ранний период его юности не обнаружили в нем каких-то исключительных способностей к ней; это не был чудо-ребенок, как Клеро, который в 10 лет читал «Анализ бесконечно малых» Лопиталя, а в 16 лет написал знаменитый трактат «Исследование кривых двойкой кривизны», или К. Ф. Гаусс, который с трех лет от роду исправил ошибку отца в денежных расчетах. Но большое усердие и систематичность в занятиях сказались позже, когда он начал заниматься самостоятельно.

Когда Эйлер подросток, он был отдан на попечение бабушки в Базель, где продолжал учиться в гимназии и брать частные уроки по математике.

В 1720 г. юный Эйлер, после окончания гимназии, поступает в Базельский университет, где слушает лекции знаменитого математика Ивана Бернулли. Хотя по настоянию отца Эйлер одно время начал усиленно изучать богословие, но вскоре был полностью поглощен математикой.

Огромную роль в его математических занятиях сыграли беседы на дому с И. Бернулли, происходившие по субботам в течение нескольких лет. И. Бернулли предложил Эйлеру самостоятельно изучить трудные, но оригинальные первоисточники, чтобы он мог пояснить ему наиболее трудные места. Один из биографов Эйлера замечает по этому поводу: «Превосходная метода, но ею можно было пользоваться, имея дело лишь с подлинным гением, столь же пылким и нетерпеливым в своих устремлениях, как и неутомимым в работе — каков был Эйлер, предназначенный заменить своего учителя и составить эпоху в истории математических наук». Эйлер впоследствии говорил, что достаточно было объяснение одной трудности, чтобы сразу стали ясными целых десять.

В 1723 г. шестнадцатилетний Эйлер сдал экзамен на степень магистра наук, произнеся речь по-латыни, сравнивая натурфилософию Ньютона и Декарта. Попытки Эйлера получить место профессора в Базеле не увенчались успехом, и он должен был искать научное счастье в другой стране. В 1725 г. была учреждена Российская академия наук

в Петербурге; два сына учителя Эйлера — Николай и Даниил Бернулли, с которыми он давно уже был в дружеских отношениях, получили приглашение занять места академиков в Петербурге. У Эйлера появилось огромное желание вместе с братьями Бернулли отправиться в далекий Петербург.

«У меня, — пишет Эйлер, — явилось невыразимое желание отправиться вместе с ними в 1725 году в Петербург. Дело, однако, не могло тогда скоро осуществиться, а между тем молодые Бернулли крепко обещали мне по прибытии в Петербург похлопотать о пристойном для меня месте, что скоро действительно и случилось...» [2]. В 1726 г. Эйлер получил приглашение Русской академии наук и весной 1727 г. прибыл в Петербург.

Русская академия наук явилась как колыбелью, так и вершиной научной славы Эйлера. Сам Эйлер об этом говорил часто. В письме к президенту Академии Шумахеру он писал: «Что собственно до меня касается, то в случае неимения того превосходного случая (т. е. приглашения в Русскую академию), я бы вынужден был главнейше принадлежать к другим наукам, от которых, по всем признакам, я бы оступел только. Его королевское величество (т. е. прусский король Фридрих II) недавно меня спрашивал: где я изучил то, что знаю? Я, согласно истине, ответил, что всем обязан моему пребыванию в Петербургской академии наук».

Начиная с 1727 г., научные статьи Эйлера непрерывно (до самой его смерти и много лет спустя после смерти) опубликовывались в трудах Русской академии; не появлялось ни одного тома академических записок, где бы не находились работы Эйлера по математике, физике и механике.

Работоспособность Эйлера является поразительной и имеет очень мало precedентов в истории наук. Даже сейчас, когда в основном собраны все его работы, трудно точно установить количество написанных им статей, курсов и монографий, во всяком случае эта цифра не менее 850, и чтобы полностью опубликовать все его работы, потребуется свыше 2500 печатных листов.

В 1735 г. Академия получила задание выполнить в срочном порядке весьма трудное и сложное вычисление — составление таблиц для определения времени по солнцу, на которое академики, в частности Н. Делиль, потребовали несколько месяцев. Эйлер к великому изумлению своих коллег произвел все вычисления за три дня и три ночи. Однако это чрезвычайное напряжение не прошло без последствий. Эйлер заболел «нервной горячкой», что отразилось на его правый глаз, причем этот тяжелый недуг не уменьшил научной продуктивности Эйлера, он скорее отказывался бы от приема пищи, чем от работы. Про него говорили, что он живет, чтобы работать, а после его смерти повторяли «Эйлер перестал мыслить и вычислять».

Эйлер обладал огромной памятью и способностью произвести большие вычисления в уме. Вычислительный гений Эйлера в истории математики имеет только одного достойного соперника — К. Ф. Гаусса. По словам академика Лузина [3], глубокое понимание Эйлером математических формул, его искусство комбинировать и оценивать их до сих пор никем не превзойдены.

Научная деятельность Эйлера, продолжавшаяся в течение 60 лет, протекала в двух академиях, с 1727 по 1741 г. в Петербургской, с 1741 по 1766 г. в Берлинской и с 1766 по день смерти — 1783 г. — опять в Петербургской. Но следует подчеркнуть, что Эйлер фактически все эти

60 лет непрерывно был связан своими научными работами с Русской академией.

За время пребывания его в Берлине он поместил 119 работ в трудах Прусской академии, а 109 статей в Русской, причем берлинские работы Эйлера по преимуществу имеют прикладной характер и написаны на французском языке; петербургские статьи написаны по-латыни и носят главным образом теоретический характер.

Находясь в Берлине, Эйлер вел обширную переписку с Петербургской академией и с учеными, в частности, с Ломоносовым, работы которого он ценил весьма высоко. В берлинский период он воспитал крупных ученых из русской молодежи.

Эйлер был одним из широко образованных людей того времени; круг его интересов охватывал многие области науки: математики, механики, астрономии, физики, теории упругости, оптики, баллистики, морской науки, страхового дела, философии и даже теории музыки. Но Эйлер прежде всего был математиком и на все, даже на музыку, смотрел «с точки зрения бесконечно малых». Эйлер мастерски излагал самые трудные вопросы дифференциального и интегрального исчисления, механики, физики и т. д. Написанные им курсы и монографии до сих пор являются образцами в этом направлении, как, например, «Механика» в двух томах, «Введение в анализ» в двух томах, «Дифференциальное исчисление», «Теория движения твердого тела», «Интегральное исчисление» и т. д. С точки зрения полноты и глубины охвата вопросов эти работы и до сих пор представляют интерес. Вот что писал в 1933 г. наш академик Н. Н. Лузин [3] об «Интегральном исчислении» Эйлера:

«Без всякого преувеличения можно сказать, что, несмотря на все попытки сильнейших математиков и педагогов, писавших после Эйлера до наших дней и желавших или расширить рамки выполненных интеграций, или просто сказать новое слово в самом изложении интегрального исчисления, — это последнее все еще остается в том же самом виде, каким его дал Эйлер, и все новейшие усилия вращаются по-прежнему в том же замкнутом кругу. В отношении интегрального исчисления современные учебники являются лишь переделками трактата Эйлера, только подновлением этого труда в отношении языка... Слава Эйлера заключается еще в том, что он раздвинул границы интегрального исчисления до пределов, о которых не мечтали его основатели: Ньютон и Лейбниц».

Эйлер развил дальше метод бесконечно малых, заложил основы ряда математических дисциплин, как, например, теории аналитических функций, вариационного исчисления, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, теории движения Луны, теории специальных функций (гамма- и дзета-функций); он весьма основательно обогатил теорию чисел. Как отметил великий русский математик П. Л. Чебышев, Эйлер положил начало почти всем изысканиям в области теории чисел, которая получила большое развитие в XIX столетии в Германии и России.

О научной многогранности Эйлера говорит такое его произведение, как «Письма о разных физических и философических материалах, написанных к некоторой немецкой принцессе», в которых даны объяснения многим вопросам, волновавшим людей в XVIII столетии. Этот труд Эйлера выдержал свыше 40 изданий на 10 языках.

Труды Эйлера начали издаваться в Швейцарии по материалам Русской и Германской академий наук и др. с 1911 г., причем до 1957 г. вышло 40 томов; предполагается, что полное собрание сочинений Эйлера будет в 72 томах. Работы издаются на том языке, на котором

написаны оригиналы. В это издание не включена переписка Эйлера (около 3000 писем).

К редактированию трудов Эйлера привлекаются ученые различных стран; из русских математиков были приглашены А. М. Ляпунов, А. А. Марков и др.

Кроме научной работы, Эйлер в России занимался преподаванием, участвовал в работе различных комиссий по оценке конкурсных задач, делал инженерные расчеты и т. д. В 1776 г. он состоял членом экспертной комиссии по оценке проекта постоянного одноарочного моста через Неву И. П. Кулибина. И надо сказать, что он был единственным членом, высоко оценившим проект Кулибина, а впоследствии оказал ему помощь в теоретических расчетах и пересчетах результатов испытаний моделей в натуре.

На шестидесятом году жизни Эйлер пришел к твердому заключению, что ему надо вернуться в Россию, где прошла его молодость, где его высоко ценили и любили. И действительно, после долгих хлопот и просьб он был отпущен из Берлинской академии прусским королем Фридрихом II. 17 июля 1766 г. Эйлер вместе с семьей вернулся в Петербург, где он был принят со всеми почестями.

Однако осенью этого же года Эйлера постигло большое несчастье — он ослеп уже и на левый глаз (правый был потерян в 1738 г.). Эта весть была воспринята ученым миром с большим сожалением. В 1767 г. Лагранж писал Деламберу: «Говорят, что Эйлер потерял или потеряет зрение. Это была бы неизмеримая утрата для математики» [4]. После мучительного лечения, длившегося почти год, зрение Эйлеру не было возвращено. Но работоспособность его не снизилась вследствие этого несчастья. Благодаря феноменальной памяти и помощи учеников Головина и Н. Фусса, научная продуктивность Эйлера увеличилась. За последнее десятилетие своей жизни Эйлер создал почти половину всех своих научных трудов. По исследованию А. П. Юшкевича [5], работы Эйлера по десятилетиям распределяются следующим образом:

1725 — 1734 гг. — 35 работ — 4%	1755 — 1764 гг. — 110 работ — 14%
1735 — 1744 гг. — 80 „ — 10%	1764 — 1774 гг. — 145 „ — 18%
1745 — 1754 гг. — 150 „ — 19%	1775 — 1783 гг. — 270 „ — 34%

Наиболее интенсивным в деятельности Эйлера был 1777 год, когда он вместе со своими учениками подготовил для печати более 100 работ, причем три из них посвящены вопросам математической картографии и представляют большой исторический интерес для геодезистов и картографов.

О последних годах жизни Эйлера (после потери левого глаза) имеются интересные воспоминания Иоганна Бернулли (племянника Даниила Бернулли), который, как и его дядя, был приглашен Петербургской академией наук занять кафедру математики, но он рано (1789 г.) умер, не успев осуществить возлагавшихся на него больших надежд. В первом году своего пребывания в Петербурге (1777 г.) он посетил Эйлера и впоследствии писал:

«Здоровье Эйлера довольно хорошее. Зрением, по большей части утраченным, а одно время вовсе потерянным, он, однако, теперь лучше пользуется, чем многие воображают! Хотя он и не может узнавать никого в лицо, читает черное на белом и пишет потом на бумаге, пишет на черном столе свои математические вычисления мелом очень ясно в обыкновенную величину. Потом они выписываются в большую книгу одним из его учеников Н. Фуссом и Головиным (чаще первым) и из этих-то материалов составляются под его руководством статьи... Эйлер

обещал, что двадцать лет после его кончины статьи его, как и при жизни, могут быть читаны и помещаемы в периодическом издании Академии. Чтобы было понятнее, как достает у Эйлера времени на такие неумолимые работы, должен заметить, что он никуда более не выезжает, так как несколько лет назад, с потерей зрения слух у него значительно ослабел, а вне дела он менее находит развлечений и менее может ожидать занятий... У него совершенно особенная и по крайней мере необыкновенная способность отвлекаться без досады от самых сложных выкладок и потом опять также легко возвращаться к ним и находить прежнюю нить к ним» (Журнал «Русская старина», т. 132, 1907 г., стр. 496).

К сказанному И. Бернулли следует добавить следующее. Когда Эйлер в 1766 г. вернулся в Петербург, он с собой взял совершенно неграмотного своего слугу-портного, которого Эйлер обучил грамоте и математике в такой степени, что тот стал его деятельным помощником, мог производить весьма сложные алгебраические вычисления и записывать под диктовку Эйлера статьи для печати.

Эйлер скоропостижно скончался 18 сентября 1783 г. на 76-м году жизни от кровоизлияния в мозг. Он был похоронен на Смоленском лютеранском кладбище Васильевского острова. Осенью 1956 г. его могила и памятник были перенесены в Ленинградский некрополь и помещены рядом с могилой М. В. Ломоносова.

В России работали три сына Эйлера: старший, член Петербургской Академии наук, математик и механик, Иоганн Альбрехт (1734—1800); средний Карл (1740—1790), врач, придворный медик; младший Христофор (1743—1812), участник астрономической экспедиции Академии наук 1769 г., генерал-лейтенант артиллерии, директор оружейного завода в Сестрорецке. Род Эйлеров до сих пор имеет своих представителей в советской науке — в Ленинградском институте железнодорожного транспорта работает доцентом Александр Александрович Эйлер.

* *
*

Большой исторический интерес представляет картографическая деятельность Эйлера. Из практических работ Эйлера наиболее существенным представляется его деятельность по составлению «Атласа Российского, 1745 г.».

В 1735 г., по просьбе астронома Н. Делиля, тогдашнего руководителя картографических работ Академии наук, Эйлер был привлечен к картографическим работам Географического департамента Академии наук, где он «трудился совместно с другими в сочинении географии Российского Государства». По этому поводу в архиве Академии наук СССР имеется документ, в котором сказано, что поручается Эйлеру «чтобы он оказывал Делилю всяческое содействие как в изготовлении ландкарт, так и во всем, что еще потребуется для географии» [4]. Имеются исторические указания, что Эйлер не только редактировал карты, собирал и систематизировал картографические материалы, но и сам лично «чертил» различные карты.

Особенно интенсивно протекала работа Эйлера по редактированию листов карт Атласа 1745 г. в 1736—1738 гг., когда ему приходилось ежедневно просматривать большое количество оригиналов. Его упорные занятия картографией вскоре сделали его ведущей фигурой в Географическом департаменте, конкурирующей с руководителем Департамента Делилем Н. После отъезда Н. Делиля в Березовскую экспедицию Академии наук для наблюдения солнечного затмения (1740 г.) Эйлер

примерно в течение года (март 1740 и февраль 1741 г.) заведовал Географическим департаментом. В этот период Эйлер совместно с академиком Н. Г. Гейнзиусом разработал проект генеральной карты Русской империи, что впоследствии дало ему право писать: «Я уверен, что география российская через мои и г. профессора Гейнзиуса труды проведена гораздо в исправнейшее состояние, нежели география немецкой земли».

Картографические занятия сильно действовали на зрение Эйлера, причем некоторые исследователи склонны допустить, что причиной потери Эйлером правого глаза были эти занятия. Они ссылаются на следующее письмо Эйлера к Гольдбаху от 21 августа 1740 г.: «География мне губительна. Вы знаете, что я за нее поплатился глазом, а теперь опять нахожусь в подобной опасности, когда мне сегодня утром принесли часть карт на просмотр, то я тотчас же почувствовал новый припадок, потому что эта работа, требуя всегда рассмотрения одновременно большого пространства, сильнее утомляет зрение, чем простое чтение или одно писание» [2]. Вероятнее всего, что тут действовала совокупность причин — сложные астрономические вычисления в 1735 г., когда он заболел нервной горячкой, что сказалось на зрении правого глаза, и интенсивные занятия по редактированию карт. Поэтому он в 1740 г. стал просить, чтобы его уволили от этой работы. В мае 1741 г. Эйлер вообще уволился из Академии и переехал в Берлинскую академию по приглашению прусского короля Фридриха II. Находясь в Берлине, Эйлер интересовался картографическими работами Академии. По просьбе Шумахера, Эйлер в 1751 г. дал довольно подробную рецензию на некоторые карты Атласа 1745 г. Это письмо, по всей видимости, советским картографам в русском переводе неизвестно, поэтому ниже приводятся наиболее важные выдержки из него.*

«Если бы Атлас не был издан, то никогда не узнали бы о таких ошибках; знание же их заставит Академию в будущем выпустить карты лучшего качества...»

«Итак, хорошо, что в Бюро географии все время продолжают разбирать, и в первую очередь просматриваются те провинции, для которых имеется много специальных карт; их сопоставляют друг с другом со всевозможной осмотрительностью, чтобы из точных сравнений получить все более совершенные карты. Поэтому высокий Сенат должен создать учреждение, которое собирало бы специальные карты из многих местностей, а также постаралось добывать все наилучшие карты из соседних государств, недостаток которых в Бюро особенно ощущается. Это учреждение должно постараться, согласно моему первому предложению (имеется в виду проект 1740 г. Эйлера и Гейнзиуса), в первую очередь сопоставлять хорошие карты провинций, соблюдая при этом все предосторожности... И если каждые 10 лет будут издаваться новые карты, то будет достигаться все большая степень совершенства исправлениями ошибок, допущенных в прежних картах; при этом неоценимые услуги окажут критические замечания, сделанные по поводу этих карт».

После возвращения из Германии Эйлер вновь занялся делами Географического департамента и с 1769 по 1783 г. совместно с Румовским, его учеником, заведовал картографическими работами Академии. К этому периоду относятся работы Эйлера по математической картогра-

* Полный текст письма на немецком языке можно найти в статье С. Я. Лурье «Неопубликованная научная переписка Эйлера» АН СССР. Труды Института истории науки и техники. Серия II. Вып. I, стр. 157—159, 1935 г.

фии: «Об изображении поверхности шара на плоскости»; «О географической проекции поверхности шара» и «О географической проекции Делиля, примененной на генеральной карте Российской Империи».

Первая из перечисленных работ, имеющая наибольшее значение, посвящена общей теории конформного изображения поверхности шара на плоскости. Предшественником Эйлера в этом вопросе был Иоганн Генрих Ламберт, который за пять лет до Эйлера, в 1772 г., в сборнике *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung* (Материалы по применению математики и приложений), опубликовал статью, озаглавленную «Замечания и добавления к вопросу о составлении географических и небесных карт». В этой работе Ламберт впервые приводит общие формулы конформного изображения поверхности шара на плоскости. Однако в то время, как Ламберт из рассмотрения частных задач пытается сделать обобщения, которые ему вообще не удалось, Эйлер в самом начале исходит из общей постановки задачи и из общих формул выводит частные.

Именно в этой работе он трактует общие принципы математической картографии: конформность и эквивалентность изображения. В начале мемуара приводится доказательство очевидного факта, что поверхность шара не может конгруентно (равно и подобно) изобразиться на плоскости. После получения общих формул Эйлер рассматривает три случая: в первом требуется, чтобы параллели и меридианы изображались прямыми, параллельными осям координат на плоскости; во втором выставляется требование конформности изображения и в третьем — эквивалентность. Общие выводы Эйлера обладают большим аналитическим изяществом, причем в некоторых вопросах он вплотную подходит к введению аналитических функций при конформном изображении; задача эта была полностью решена Гауссом спустя 50 лет после работ Эйлера. Бесспорно, в общей постановке вопроса Эйлер значительно опередил Ламберта. Только через пять лет Лагранжу удалось пойти дальше Эйлера и дать решение задачи конформного изображения любой поверхности вращения на плоскости.

Во второй статье речь идет о стереографической проекции шара на плоскости. Эйлер прежде всего рассматривает случай, когда картинная плоскость касается шара в точке южного полюса, а точка глаза находится в точке северного полюса, причем он получает следующие выражения для прямоугольных координат:

$$x = 2 \operatorname{tg} \frac{u}{2} \cos v, \quad y = 2 \operatorname{tg} \frac{u}{2} \sin v,$$

где u — географическая широта,
 v — географическая долгота.

В дальнейшем развитие аналитического аппарата приводит его к наиболее общему решению вопроса, к комплексному выражению

$$z = x + iy = 2 \operatorname{tg} \frac{u}{2} (\cos v + i \sin v).$$

Обобщив это выражение, Эйлер совершенно обоснованно утверждает, что конформное изображение получается при любой аналитической функции $f(z)$. Он ставит вопрос, какая же аналитическая функция $f(z)$ будет наиболее целесообразной в данном вопросе: «Во-первых, известно, что более высокие степени z не могут годиться для этой цели, так как тогда в вычислениях должны войти широты и долготы, увеличенные во много раз, и, кроме этого, функция, о которой идет речь,

должна быть дробью, ибо для x и y получаются дробные величины. Поэтому для данной функции мы примем выражение в общем виде

$$f(z) = \frac{a + b \cdot z}{c + d \cdot z}.$$

Эта формула, по мнению Эйлера, наиболее простая. Далее он находит значения коэффициентов a , b , c и d .

Третья статья посвящена разбору проекции Делиля, которая была принята при составлении генеральной карты Русской Империи. Проекция Делиля равнопромежуточная, сохраняющая главный масштаб по меридианам, причем параллели, на которых сохраняется главный масштаб, берутся на равных расстояниях от средней и крайних параллелей изображенной территории. Эйлер исследовал искажения в этой проекции и предложил свою проекцию, в которой параллели сечений выбираются под условием, чтобы разности длин дуг на проекции и в натуре были на крайних широтах территории одинаковы и равнялись разности дуг в натуре на карте для средней широты. Искажения в проекции Эйлера меньше, чем искажения в проекции Делиля, но сами по себе они не малы, поэтому данная проекция в картографической практике особого применения не нашла. Наиболее ценным является метод исследования искажений проекции Делиля.

Геодезическая линия и ее аналитическая теория сыграли большую роль в развитии высшей геодезии и математической картографии. Эйлеру принадлежит одно из первых детальных исследований свойств геодезической линии, он также заложил основы теории поверхностей. Эйлер ввел понятие о главных нормальных сечениях в точке поверхности и в «Исследовании о кривых поверхностях» (1763 г.) вывел знаменитую формулу кривизны любого нормального сечения, носящую его имя.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N},$$

где A — азимут сечения, M и N — радиусы главных нормальных сечений в данной точке поверхности.

Приведенная формула имеет весьма широкое применение в различных вопросах высшей геодезии и математической картографии, она была наибольшим достижением в дифференциальной геометрии до появления работ Гаусса.

В течение 1753 и 1754 гг. Эйлер представил Берлинской академии наук две работы, имевшие определенное значение для развития сферической, сфероидической тригонометрии и сфероидической геодезии. Первая статья под названием «Принципы сферической тригонометрии, выведенные из метода наибольших и наименьших», содержит вывод основных формул сферической тригонометрии (закон синусов, закон косинусов углов и сторон, закон котангенсов), полученных методом вариационного исчисления. Эта работа была как бы введением к исследованию: «Основы сфероидической тригонометрии, выведенные из метода наибольших и наименьших» (1754 г.), где рассматриваются геодезические линии на эллипсоиде вращения и дается решение треугольника, образованного геодезическими линиями. Практической целью статьи было показать, как из результатов градусных измерений на различных широтах можно определить сжатие Земли. Обозначая большую полуось эллипсоида через e , малую — a , Эйлер вводит величину, которой пользуемся и теперь

$$\delta = \frac{e^2 - a^2}{e^2 + a^2},$$

причем квадратом этой величины он в дальнейших выводах пренебрегает.

Для длины дуги меридиана, средняя широта которой φ , Эйлер предлагает формулу

$$2\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{e^2 a^2}{(e^2 + a^2)^{3/2}} (1 - \frac{3}{2} \delta \cos 2\varphi).$$

После вывода этой формулы, где отбрасаны члены $c\delta^2$, он обрабатывает материалы известных в то время немногих градусных измерений (Перуанской, Лапландской и Капской — у мыса Доброй Надежды) на предмет определения из них сжатия Земли, которое получилось равным $\frac{1}{229}$, т. е. подтвердилось сжатие по Ньютону. Следует заметить, что определение Эйлера и для того времени было весьма неточным, что было поводом специальной статьи — протеста французского академика Лакайля. Эйлер впоследствии оправдывался, заявив, что он занимался в этом случае вопросом об измерении длины градуса меридиана только с геометрической точки зрения.

В этом исследовании методом вариационного исчисления Эйлер получает основное уравнение геодезической линии на эллипсоиде, т. е. уравнение Клеро, но нигде он об этом не упоминает, хотя работу Клеро «Геометрическое определение перпендикуляра к меридиану» он в то время знал. Далее рассматривается задача: на поверхности эллипсоида вращения дан треугольник MNP , P — полюс эллипсоида, MP и NP — дуги меридианов, MN — дуга геодезической линии, причем в треугольнике известны дуги MP , NP и угол при вершине M , т. е. азимут геодезической линии MN ; требуется вычислить дугу геодезической линии MN , разность долгот и дополнения до 360° обратного азимута геодезической линии. Чтобы понять, почему задача поставлена так, надо вспомнить, что Эйлер и его современники считали, что геоид в точности совпадает с эллипсоидом вращения и, следовательно, речь не могла тогда идти о разности астрономических и геодезических координат. Из астрономических определений получаются широты двух пунктов и азимут геодезической линии; остальные величины: разность долгот, длина дуги геоидной и обратный ее азимут получаются из решения указанного треугольника. Вот как понимал геодезическую задачу Эйлер.

В конце работы рассмотрен вопрос об определении сжатия Земли из основного уравнения геодезической линии

$$\frac{\cos B_1 \sin A_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} = - \frac{\cos B_2 \sin A_2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}},$$

если известны широты двух точек B_1 , B_2 и азимуты геоидной в этих точках A_1 и A_2 . Эйлер тщательно исследовал влияние ошибок измерений широт и азимутов и пришел к выводу: «Впрочем, я должен признаться, что этот способ никогда не будет осуществлен на практике; не только встретятся неопределенные трудности для определения кратчайшей линии, но и линия меридиана не будет проведена с такой точностью, с какой это необходимо в нашем способе; ошибка в $20''$ почти неизбежна». Следует заметить, что сам способ математически совершенно правильный, если считать, что поверхности геоида и сфероида совпадают в точности. Приведенное выше решение Эйлера сфероидического треугольника было определенным достижением для того времени, когда только начались подлинные градусные измерения.

Теория ошибок измерений не выпала из сферы универсального гения Эйлера. До Эйлера считалось истиной, что более надежно получить искомую величину из нескольких измерений, содержащих случай-

ные ошибки, чем ограничиться для этой цели одним, весьма тщательно выполненным измерением. Даниил Бернулли своей работой «Вывод наиболее вероятного значения из многих неодинаковых наблюдений» (1778 г.) представил Эйлеру случай заняться теорией ошибок в статье «Замечание по поводу предшествующей диссертации знаменитого Д. Бернулли» (1778 г.). Д. Бернулли в указанной работе критиковал принцип арифметической середины из-за того, что всем ошибкам измерений одной и той же величины приписывается одинаковая достоверность независимо от величины ошибки. Бернулли совершенно правильно подчеркивает, что наибольшие ошибки имеют меньшую вероятность, чем наименьшие. Он требует, чтобы каждому отклонению x приписалась вероятность $y = f(x)$, предлагая принять $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, где r — постоянная величина, определенная из опыта для каждого случая, r — радиус окружности, центр которой определяется таким образом, чтобы совокупность всех наблюдений была наиболее вероятной. Бернулли приходит к выводу на основании выбора r , что

$$Q(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{r^2 - (x - a_1)^2} \cdot \sqrt{r^2 - (x - a_2)^2} \dots \sqrt{r^2 - (x - a_n)^2}$$

должна быть максимальной. Когда имеется n наблюдений, максимум $Q(x)$ приводит к уравнению степени $(2n - 1)$. И только при $n = 2$ мы приходим к арифметической середине.

Эйлер выделил чисто геометрическую часть решения Бернулли и вывел свой способ, гораздо проще решающий поставленный вопрос. Эйлер показал, что во многих случаях можно ограничиться уравнением второй степени. К этому вопросу Эйлер привлек теорию непрерывных дробей и для получения наиболее вероятного значения x применил метод последовательных приближений.

Вторая по важности работа Эйлера по теории ошибок появилась после опубликования знаменитого мемуара Лагранжа «О пользе способа брать среднее из результатов многих наблюдений» (1773 г.). В 1777 г. Эйлер представил Петербургской академии работу: «Пояснения к мемуару Лагранжа», помещенную в V томе *Mélanges de Turin* и содержащую способ, как находить среднее из результатов нескольких измерений. Здесь Эйлер не идет дальше Лагранжа, но очень подробно рассматривает несколько частных случаев, для которых он дает весьма простые решения. Эйлер говорит, что астрономы, произведя известное количество наблюдений, доставляющее ряд неравных значений для неизвестной, берут сумму этих значений и делят на их число. Возникает вопрос, как определить вероятность, что эта сумма становится или равной нулю, или какому-либо другому положительному или отрицательному числу. Эйлер берет пример из астрономических наблюдений и допускает, что для определения широты или склонения звезды сделано a наблюдений, которые в точности дают искомую величину, b — наблюдений, доставивших искомую величину ровно на одну минуту больше, и c — наблюдений, давших на одну минуту меньше. Число наблюдений $N = a + b + c$; требуется определить, какова вероятность, что сумма этих результатов будет равна или 0, или ± 1 , или ± 2 ... Задачу в общем виде Эйлер решает так: если сделаны $N = a + b + c + d$ наблюдений, из которых

a	имеют одну и ту же ошибку α ,
b	" " " " " β ,
c	" " " " " γ ,

и хотя бы определить вероятность, что среднее значение равно некоторому числу $\frac{\lambda}{n}$, для чего нужно рассматривать выражение $(ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma)^n$ и взять сумму всех членов, имеющих одну и ту же степень x^λ , которая, разделенная на N^n , дает вероятность, что среднее значение равно $\frac{\lambda}{n}$.

Решение Эйлера, хотя и строгое, но весьма неудобное для практического применения, и поэтому труды Эйлера по данному вопросу не получили распространения и применения. Спустя 20 лет после этого, благодаря исследованиям Лежандра и Гаусса, теория ошибок получила свое окончательное обоснование, по крайней мере для геодезических измерений.

*
*
*

Жизнь и научная деятельность Эйлера является одним из ярких примеров подлинного служения науке. Для советских ученых весьма отраднo, что этот великий корифей науки жил и трудился в России.

Эйлер знал русский язык, сохранился ряд писем и статей, написанных по-русски рукой Эйлера. Многие ученые в то время приезжали в Россию искать научного счастья, но большинство из них до конца своих дней оставались чуждыми русской культуре и народу. Эйлер выгодно отличался от этих людей, он высоко ценил находчивость и острый ум русского человека. «Русский человек, — писал он, — представляется более искусным, чем немец, в то время как немецкий мастер и ремесленник редко в состоянии изготовить что-либо, чему не был обучен. Я всегда с удивлением замечал, что самые простые русские люди берутся за все и по большей части счастливо справляются с делом». Эйлер вырастил целую плеяду талантливых ученых из русской молодежи, как например: академиков Семена Котельникова, автора первого в России курса геодезии («Молодой геодет», 1766 г.), Румовского, Крафта, Иноходцева, Головина, Николая Фусса и др. Эйлер писал, что Котельников по своим знаниям, дарованиям гораздо выше, чем Кюн, Кастильон и Кестнер, которых Академия хотела пригласить из Германии. После отъезда Эйлера в Берлин в Академии наук место профессора математики оставалось вакантным до 1760 г., когда был избран С. Котельников.

Россия также высоко ценила Эйлера, с гордостью называла его своим ученым, с большим торжеством отмечала замечательные даты его жизни и деятельности. В этом отношении весьма интересны высказывания французского академика Кондорсе в речи, посвященной памяти Эйлера: «Итак, народ, которого мы в начале этого века принимали за варваров, в настоящем случае подает пример цивилизованной Европе — как чествовать великих людей при жизни и уважать их память после смерти; и другим нациям приходится в данном случае краснеть, что они не только в этом отношении не могли опередить Россию, но даже не в силах ей подражать».

Советский народ еще с большей настойчивостью продолжает эту прекрасную традицию.

Г. В. Багратуни

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Тимирязев. Основные черты истории развития биологии в XIX столетии. Напечатано в книге Поля Таннери. Исторический очерк развития естествознания в Европе (1300—1900). ГТТИ, 1934.
2. П. Пекарский. История Императорской академии наук. Том первый, Санкт-Петербург, 1870.
3. Академик Н. Н. Лузин. Эйлер. Журнал «Социалистическая реконструкция и наука». Вып. В, 1933.
4. Историко-математические исследования. Вып. X, 1957.
5. А. П. Юшкевич. Жизнь и математическое творчество Леонарда Эйлера. «Успехи математических наук». Том XII, вып. 4 (76), 1957.
6. Б. Гнеденко. Очерки по истории математики в России. 1946.
7. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти Эйлера, 1935.
8. Академик А. Н. Крылов. Собрание трудов. Т. I. ч. вторая, 1951.
9. К. Михайлов. Леонард Эйлер. Журнал «Известия Академии наук СССР». Отделение технических наук, 1955.
10. Проф. А. Васильев. Целое число, 1922.
11. П. Пекарский. Екатерина II и Эйлер. Записки Академии наук. Т. 6, 1865.
12. Проф. А. Саткевич. Леонард Эйлер. Журнал «Русская старина». Т. 132, 1907.
13. А. Юшкевич. Эйлер и русская математика XVIII в. Журнал «Труды Института истории естествознания». Т. III, 1949.
14. Л. Эйлер. Введение в анализ бесконечно малых, 1936.
15. Л. Эйлер. Интегральное исчисление. Т. I и II, 1957.
16. Л. Эйлер. Письма к немецкой принцессе.
17. БСЭ. Т. 48 — Леонард Эйлер.
18. А. Маркушевич. Празднование 250-летия со дня рождения Эйлера. Журнал «Математическое просвещение», № 2, 1957.
19. Е. Литвинова. Лаплас и Эйлер, 1892.
20. Вводные статьи к 7, 27 и 28 томам Орега отпня Эйлера в переводе Н. Ф. Булаевского.



De repraesentatione superficiei sphaericae super plano

Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae
pro anno MDCCLXXVII
(T. I, p. 107 — 132)

I

Об изображении поверхности шара на плоскости

Труды Петербургской академии наук за 1777 г.
(Том 1, стр 107 — 132)

§ 1. Ниже я рассматриваю не только оптические (перспективные) проекции, с помощью которых различные точки поверхности шара изображаются на плоскости так, как они показались бы наблюдателю, находящемуся в некотором определенном месте, т. е. изображения, при которых отдельные точки, видимые наблюдателю, проектируются на некоторую плоскость по законам перспективы; напротив того, я понимаю слово изображение в самом широком смысле, так что отдельные точки поверхности шара изображаются согласно любому закону; при этом каждой точке шара соответствует определенная точка плоскости и обратно, если только не окажется, что изображение данной точки шара мнимое.

§ 2. Пусть фигура abc (рис. 1.) представляет часть поверхности шара, полюс которой находится в точке b , и alc — экватор. Пусть ab — начальный меридиан, от которого, как это принято в географии, отсчитываются долготы отдельных точек шара. Рассмотрим некоторую точку p , расположенную на меридиане bpl ; последний образует с начальным меридианом угол abl , равный дуге экватора al ; обозначим его через t .

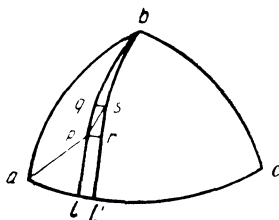


Рис. 1.

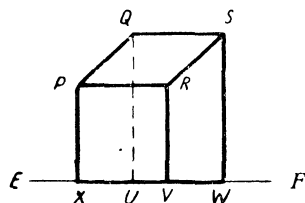


Рис. 2.

Широта этой точки представляет собой дугу $lp = u$, если за единицу примем радиус шара.

Пусть плоскость рисунка будет той плоскостью, на которой должно располагаться изображение (рис. 2), и P — та точка, которая соответствует точке p на шаре. Из точки P опущен перпендикуляр Px на ось абсцисс EF , положение которой может быть произвольным; пусть абсцисса $EX = x$ отнесена к точке E , принятой за начало координат, и ордината $XP = y$. Так как, согласно нашему допущению, точка P получается относительно точки p на шаре на основании некоторого закона, а положение p определяется двумя переменными t и u , то координаты x и y должны рассматриваться как функции тех же двух переменных t и u . Наше исследование относится поэтому к той части анализа, которая занимается функциями двух переменных.

§ 3. Введем в исследование свойство переменных величин t и u . Для этого рассмотрим на шаре точку q (рис. 1), долгота которой равна t , а широта равна $u + du$. Затем, пусть r — точка, долгота которой $t + dt$, а широта $l'r = u$. Дополним нашу фигуру до параллелограмма $pqsr$; в таком случае точка s имеет долготу $t + dt$ и широту $u + du$. На шаре мы будем иметь тогда элементарные дуги $pq = du$ и $ll' = dt$, откуда на шаре элементарная дуга $pr = \cos u dt$. Если параллелограмм $pqsr$ — прямоугольник, то его диагональ равна

$$ps = \sqrt{du^2 + \cos^2 u dt^2}.$$

§ 4. Пусть точкам p, q, r, s соответствуют на плоскости точки P, Q, R, S ; опущенные из этих точек на ось абсцисс перпендикуляры будут PX, QU, RV и SW . Так как точка Q получается от точки P , то пока переменная u изменяется только на элемент du , а t остается постоянной, координаты точки Q будут иметь следующие значения:

$$EU = x + \frac{dx}{du} du, \quad UQ = y + \frac{dy}{du} du.$$

Так как точка R получается из точки P только при изменении одного t , то абсцисса этой точки

$$EV = x + \frac{dx}{dt} dt,$$

а ее ордината

$$VR = y + \frac{dy}{dt} dt.$$

Наконец, абсцисса точки S получается из P путем одновременного изменения t и u

$$EW = x + \frac{dx}{du} du + \frac{dx}{dt} dt,$$

а ее ордината

$$WS = y + \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dt} dt.$$

Отсюда получаем, что

$$XU = \frac{dx}{du} du,$$

и, следовательно, отрезок VW имеет величину

$$VW = \frac{dx}{du} du.$$

Равным образом имеем

$$WS - VR = UQ - XP = \frac{dy}{du} du,$$

но отсюда следует, что элемент RS равен элементу PQ и равным образом элемент PR равен QS , так что четырехугольник $PQSR$ — параллелограмм.

§ 5. Сравним стороны элементарного прямоугольника на шаре $pqsr$ со сторонами его изображения на плоскости, т. е. со сторонами

параллелограмма $PQSR$. И так как $pq = du$, $pr = \cos u \, dt$, то для последних, согласно § 4, имеем значения

$$PQ = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du, \quad PR = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Расположим PQ в плоскости изображения в направлении меридиана от точки P , и элемент PQ соответствует дуге меридиана длиной du . Затем расположим PR по направлению параллели, так что элемент PR соответствует длине параллели $\cos u \, dt$. Если при этом функции x и y подобраны так, что

$$du = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$

и

$$\cos u \, dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

то как меридианы, так и параллели в плоскости изображения будут иметь такую же величину, как и на шаре. Тогда между поверхностью шара и его изображением всегда будет различие и тем большее, чем больше отличаются от прямых углы на плоскости.

§ 6. Это обстоятельство побуждает нас исследовать положение меридиана PQ и параллели PR относительно осей координат x и y . Из рисунка следует, что элемент меридиана PQ образует с осью EF угол, тангенс которого равен $\left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right)$. Равным образом направление параллели PR образует с параллелью угол, тангенс которого равен $\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)$. Разность этих углов дает угол QPR , под которым параллель наклонена к меридиану, и тангенс этого последнего угла равен

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right) - \left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}.$$

Если угол QPR должен быть прямым, как и на шаре, то необходимо, чтобы

$$\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

или

$$\left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right) = - \left(\frac{dx}{dt}\right) : \left(\frac{dy}{dt}\right).$$

§ 7. Если требуется, чтобы фигура $PQSR$ на плоскости была совершенно подобна и равна (конгруэнтна) фигуре $pqsr$ на шаре, то должны удовлетворяться следующие три условия: необходимо, чтобы

1) $PQ = pq$, 2) $PR = pr$ и 3) угол $QPR = qpr = 90^\circ$. Поэтому должны существовать следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} \text{I. } & \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} = 1 \text{ или } \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 1, \\ \text{II. } & \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \cos u \text{ или } \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \cos^2 u, \\ \text{III. } & \left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right) = - \left(\frac{dx}{dt}\right) : \left(\frac{dy}{dt}\right). \end{aligned}$$

Положив еще

$$\left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right) = \operatorname{tg} \varphi,$$

то, согласно условию III,

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right) = - \operatorname{ctg} \varphi,$$

а следовательно,

$$\frac{dy}{du} = \operatorname{tg} \varphi \frac{dx}{du} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} = - \operatorname{ctg} \varphi \frac{dx}{dt}.$$

Подставляя эти значения в первые два уравнения, получаем

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \cos^2 \varphi \quad \text{и} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \sin^2 \varphi \cos^2 u.$$

Но очевидно, что приведенные выше три условия ни при каких обстоятельствах не могут удовлетворяться одновременно, так как известно, что поверхность шара никоим образом не может быть точно отображена на плоскости.

§ 8. Чтобы исключить из вычислений выражения с дифференциалами, произведем следующие подстановки:

$$\frac{dx}{du} = p, \quad \frac{dx}{dt} = q, \quad \frac{dy}{du} = r, \quad \frac{dy}{dt} = s,$$

так что

$$dx = pdu + qdt, \quad dy = rdu + sdt.$$

Тогда в первую очередь требуется, чтобы два последних выражения были полными* дифференциалами; это будет в том случае, если p, q, r, s такие функции от переменных t и u , что

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{du} \quad \text{и} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{du}.$$

Кроме того, найденные выше выражения для элементов линий примут вид:

$$PQ = \sqrt{p^2 + r^2} du, \quad PR = \sqrt{q^2 + s^2} dt.$$

* Во времена Эйлера не было принято выражение «полный» или «точный» дифференциал, как это делается теперь, поэтому в данном месте и ниже в оригинале сказано: «формулы могут интегрироваться (integrabiles). (Прим. ред.).

Тангенс угла наклона линии PQ относительно оси равен $\frac{r}{p}$ и тангенс угла, который образует с осью линия PR , равен $\frac{s}{q}$, наконец, тангенс угла QPR равен

$$\frac{qr - ps}{pq + rs}.$$

§ 9. Введя эти обозначения, получаем для условий, которым должно удовлетворять вполне точное изображение, следующие выражения:

$$\text{I. } p^2 + r^2 = 1, \quad \text{II. } q^2 + s^2 = \cos^2 u, \quad \text{III. } \frac{r}{p} = -\frac{q}{s}.$$

Приняв здесь

$$\frac{r}{p} = \operatorname{tg} \varphi,$$

получаем

$$\frac{s}{q} = -\operatorname{ctg} \varphi,$$

т. е.

$$r = p \operatorname{tg} \varphi, \quad s = -q \operatorname{ctg} \varphi,$$

и оба первых условия дают

$$p^2 = \cos^2 \varphi, \quad q^2 = \sin^2 \varphi \cos^2 u,$$

откуда

$$p = \cos \varphi, \quad q = -\sin \varphi \cos u;$$

и далее получается

$$r = \sin \varphi, \quad s = \cos \varphi \cos u.$$

После подстановки этих значений выражения, которые должны быть полными дифференциалами, примут вид

$$dx = \cos \varphi du - \sin \varphi \cos u dt,$$

$$dy = \sin \varphi du + \cos \varphi \cos u dt,$$

а так как при этом требуется, чтобы

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{du}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{du},$$

то получатся два уравнения:

$$\text{I. } -\sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \sin u \sin \varphi - \cos u \cos \varphi \frac{d\varphi}{du},$$

$$\text{II. } \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -\sin u \cos \varphi - \cos u \sin \varphi \frac{d\varphi}{du}.$$

Умножим первое уравнение на $\cos \varphi$, а второе — на $\sin \varphi$ и сложим их, тогда получим

$$0 = \cos u \frac{d\varphi}{du}, \quad \text{т. е. } \frac{d\varphi}{du} = 0,$$

следовательно, φ должно зависеть только от переменной t . Комбинируем эти уравнения другим способом, причем складываем их после умножения первого на $-\sin\varphi$, а второго — на $\cos\varphi$, тогда получаем

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sin u,$$

поэтому $\frac{d\varphi}{dt}$ должно зависеть от u , что противоречит предыдущему результату.

Таким образом, и с помощью вычисления получается, что невозможно вполне точное изображение шара на плоскости.

§ 10. Так как отсюда следует, что вполне точное изображение полностью исключается, то мы вынуждены волей-неволей обратиться к изображениям, которые не будут подобными и у которых фигура на плоскости чем-нибудь отличается от изображаемой ею фигуры на шаре. Что касается отклонения изображения от действительности, то можем делать различные допущения*; в зависимости от допущения, которое мы кладем в основу наших рассуждений, можем достигнуть того, что изображение будет наиболее подходящим для той или иной цели. При этом, условия, которым должно удовлетворять изображение, могут изменяться самым различным способом. Из бесконечно большого числа возможностей, которые нам представляются, мы должны в дальнейшем изложении рассмотреть подробнее некоторые, особенно важные. Прежде всего будем предполагать, что углы, образуемые меридианами с параллелями, повсюду остаются прямыми. Потому что, если будем допускать также существование острых и тупых углов, то изображение будет совершенно нецелесообразным. Поэтому в дальнейшем изложении всегда будем предполагать, что угол QPR — прямой, а следовательно,

$$\frac{r}{p} = -\frac{q}{s}.$$

§ 11. Рассмотрим в общем виде, какие вытекают следствия из указанного выше требования, чтобы все параллели пересекали меридианы под прямыми углами. Для этого опять введем угол φ ; следовательно, положим $r = p \operatorname{tg} \varphi$, откуда $s = -q \operatorname{ctg} \varphi$. Подставляя эти значения r и s , получаем в таком виде выражения, которые должны быть полными дифференциалами

$$dx = p du + q dt, \quad dy = p \operatorname{tg} \varphi du - q \operatorname{ctg} \varphi dt.$$

§ 12. Чтобы эти формулы сделать более однородными, введем вместо p и q две новые переменные m и n , причем положим

$$p = m \cos \varphi, \quad q = n \sin \varphi,$$

откуда

$$r = m \sin \varphi, \quad s = -n \cos \varphi.$$

В таком случае следующие выражения должны быть полными дифференциалами

$$\begin{aligned} dx &= m \cos \varphi du + n \sin \varphi dt, \\ dy &= m \sin \varphi du - n \cos \varphi dt. \end{aligned}$$

* В оригинале здесь и ниже применяется термин «гипотеза (Hypothesis)». В современной картографической терминологии здесь больше подходит слово «предположение». (Прим. ред.).

Таким образом, вся задача сводится к вопросу: как нужно подобрать функции m и n , чтобы написанные выше выражения были полными дифференциалами. При этом надо иметь в виду еще условия, выполнение которых требуется согласно приведенным выше пояснениям.

ПЕРВОЕ ДОПУЩЕНИЕ

Все меридианы должны быть перпендикулярны оси EF , а все параллели — параллельны ей.

§ 13. Так как $\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{p}$, то угол φ измеряет наклон элемента дуги PQ относительно оси EF ; с другой стороны, направление PQ представляет собой направление меридиана. При этом угол φ , согласно принятому нами в основу предположению, должен быть прямым, и написанные выше выражения дифференциалов будут

$$dx = ndt, \quad dy = mdu.$$

Бесконечно многими способами можно достигнуть, что эти выражения будут полными дифференциалами; обычно принимают, что m — произвольная функция только от u , а n — от t . Отсюда следует, что на изображение можно наложить еще и другие условия.

§ 14. Во-первых, все градусы долготы можно сделать одинаковой величины, потому что нет никакого основания допускать неравенство между этими градусами. Если при этом наша ось EF изображает экватор, и абсцисса EX соответствует дуге экватора $al = t$, то можно принять $x = t$, т. е. упомянутую выше функцию n принять за единицу или за любую другую постоянную величину, в то время как за ординату принимать еще произвольную функцию от u .

§ 15. При таком допущении, следовательно, параллелограмм $PQSR$ будет не только прямоугольником, как и на шаре, но точка Q лежит также на ординате XP , так что $PQ = dy$, $PR = dx = dt$ (рис. 3). Если мы, кроме того, примем $y = u$, где u обозначает широту места, то в случае, если $dx = dt$ соответствует¹ одному градусу долготы, а $dy = du$ — одному градусу широты, мы имеем $dy = dx$ (т. е. все градусы долгот и широт на карте равны между собой). Но такое изображение совершенно не пригодно, и все районы Земли на нем будут показаны совершенно искаженными.

§ 16. Лучше принять ординату y равной некоторой функции широты и определить эту функцию так, чтобы она была подходящей для цели, которой должна служить карта. В первую очередь здесь целесообразно допущение, что параллелограмм $PQSR$ на плоскости должен быть подобен параллелограмму $pqsr$ на шаре, тогда по крайней мере самые малые части поверхности шара будут подобны их изображениям на плоскости. Это условие как раз положено в основу *меркаторских морских карт*, названных так по имени их изобретателя; следует заметить, что такое изображение дает мореходам наибольшие выгоды. Мы очень кратко рассмотрим этот вид изображений.

I. О морских картах в проекции Меркатора

§ 16-а. Так как здесь прямоугольник $PQSR$ должен быть подобен прямоугольнику $pqsr$, в котором

$$pq = du, \quad pr = \cos u \, dt,$$

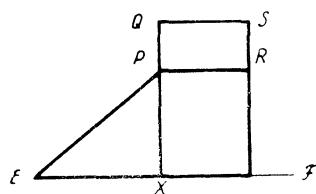


Рис. 3.

то должно быть

$$dy : dx = du : \cos u \, dt;$$

принимая во внимание, что $dx = dt$, отсюда следует

$$dy = \frac{du}{\cos u};$$

наконец, интегрируя это выражение, получаем

$$y = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right).$$

Широте, измеряемой на шаре углом u , соответствует, следовательно, на изображении ордината, равная натуральному* логарифму тангенса угла $\left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right)$. По этой формуле были вычислены таблицы, в которых для отдельных широт u даны соответствующие значения y .

§ 17. Так как здесь все параллельные круги на карте равны экватору, между тем как на шаре они становятся все меньше и меньше, то градусы каждого меридиана, которые на шаре равны, на карте должны увеличиваться в том же отношении, в каком увеличивались градусы отдельных параллельных кругов по сравнению с их величиной на шаре. Поэтому градусы широты на меридианах постоянно увеличиваются с возрастанием широты и в том же самом отношении, в каком уменьшается косинус широты. Поэтому если градус меридиана на шаре равен du , то на разбираемых нами картах длина того же градуса равна $\frac{du}{\cos u}$. Например, на широте 60° градус меридиана имеет длину в два раза больше, чем на шаре, а на полюсе он увеличивается даже до бесконечности. Вследствие этого подобные карты никогда не могут простираться до полюса.

§ 18. Самая большая выгода, которую дают мореплавателям эти карты, состоит в том, что локсодромические линии, т. е. те кривые, которые образуют один и тот же угол со всеми меридианами на шаре, изображаются прямыми линиями на карте; эти последние пересекают все меридианы карты, которые на ней параллельны одна другой, под одним и тем же углом.

§ 19. Если, например, линия ap (см. рис. 1) изображает такую локсодрому, которая со всеми меридианами образует угол ζ , и если длину ее ap обозначить через z , то

$$du : dz = \cos \zeta : 1,$$

т. е.

$$dz = \frac{du}{\cos \zeta} \quad \text{и} \quad z = \frac{u}{\cos \zeta}.$$

Теперь, пусть некоторой кривой ap в плоскости изображения соответствует линия EP (рис. 3). Тогда угол EPX также равен ζ , а потому линия EP , очевидно, будет прямой, ее длина равна $\frac{y}{\cos \zeta}$. Если известна

* В оригинале всегда применяется термин «гиперболический логарифм» вместо натурального. (Прим. ред.).

длина линии EP , то, наоборот, по ней можно получить длину пути, который прошел корабль, т. е. длину кривой ap , так как, согласно сказанному выше, существует пропорция

$$ap : EP = u : y,$$

и отношение $u : y$ можно рассматривать как известное.

§ 20. В то время как, с одной стороны, изображения локсодромических линий на плоскости представляют собой просто прямые линии, с другой стороны, большие круги шара изображаются трансцендентными кривыми более высокого порядка. Пусть ap (см. рис. 1) — дуга большого круга и образует с экватором в точке a угол $lap = \vartheta$, как известно,

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} \vartheta \sin t.$$

При помощи этого уравнения и выведенных выше двух других

$$x = t, \quad y = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right)$$

можно определить кривую EP , которая соответствует дуге ap .

§ 21. Чтобы определить свойства кривой, о которой идет речь, обозначим через e основание натуральных логарифмов, тогда получим

$$e^y = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} u}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} u},$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} u = \frac{e^y - 1}{e^y + 1},$$

затем

$$\operatorname{tg} u = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y}.$$

Подставляя это значение для $\operatorname{tg} u$ в написанное выше уравнение и имея в виду, что $t = x$, получаем следующее уравнение, связывающее x и y ,

$$\frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \operatorname{tg} \vartheta \sin x;$$

это и есть уравнение искомой кривой. Из него следует, что если x очень мало, то и y тоже очень мало. Но при очень малых значениях y , а также x можно принять

$$e^y = 1 + y; \quad e^{2y} = 1 + 2y,$$

откуда, если $\sin x = x$, получим

$$\frac{y}{1 + y} = x \operatorname{tg} \vartheta$$

или, если пренебречь величиной y^2 ,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \vartheta.$$

Поэтому кривая в точке E точно так же наклонена к экватору на угол ϑ .

Затем, если принять $x = 90^\circ$, то

$$\frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \operatorname{tg} \vartheta,$$

откуда

$$e^y = \operatorname{tg} \vartheta + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \vartheta + 1} = \frac{\sin \vartheta + 1}{\cos \vartheta} = \sqrt{\frac{1 + \sin \vartheta}{1 - \sin \vartheta}} = \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{1}{2} \vartheta \right)$$

и

$$y = \ln \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{1}{2} \vartheta \right) = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \vartheta \right).$$

Отсюда можно узнать, что кривая принадлежит к семейству трансцендентных кривых более высокого порядка.

II. О картах, которые изображают любую площадь в ее действительных размерах.

§ 22. Пусть опять, как мы уже предполагали, все меридианы изображены параллельными прямыми линиями, и все градусы экватора равны; градусы долготы, отсчитываемые по какой-либо параллели, имеют тогда такую же величину, как и на экваторе; следовательно, опять будет $x = t$. Поступаем теперь так, чтобы площадь прямоугольника $PQSR = dx \cdot dy$ равнялась площади прямоугольника $pqsr$ на шаре, т. е. равнялась $\cos u \, du \cdot dt$; для этого необходимо только, чтобы $dy = \cos u \, du$, откуда после интегрирования получаем

$$y = \sin u.$$

Поэтому очень легко построить такую карту; для этого только берут отдельные ординаты равными синусам соответствующих широт. Градусы широты, откладываемые по меридианам, будут тем меньше, чем они дальше отстоят от экватора, и на полюсе совершенно исчезнут. Самый полюс будет изображен прямой линией, параллельной экватору, отстоящей от экватора на расстоянии $\sin u = 1$; это расстояние, следовательно, равно радиусу шара.

§ 23. Если изображают таким способом всю поверхность Земли, то карта будет иметь форму прямоугольника, длина которого равна окружности экватора, т. е. равна 2π , между тем как расстояние по широте в обе стороны от экватора до полюса равно единице длины, а поэтому площадь прямоугольника равна 4π , т. е. равна поверхности всего шара. На таких картах все страны Земли изображаются в их действительных размерах, но формы их имеют большие отклонения от истинного вида. При таком изображении площадь любой страны на карте всегда равна площади этой страны на земной поверхности. Такие карты могут служить для того, чтобы сравнивать истинную величину различных областей на Земле. Лучше всего это делать в таких единицах, как квадратные градусы экватора или квадратные мили, причем в одном градусе экватора надо считать пятнадцать немецких миль.*

* Одна немецкая (географическая) миля равна 7,4204 км согласно элементам Бесселя и 7,4214 согласно элементам Красовского. (Прим. ред.).

ВТОРОЕ ДОПУЩЕНИЕ

Наименьшие части поверхности Земли должны быть представлены подобными им фигурами на карте.

§ 24. Если такое подобие должно иметь место, то прежде всего необходимо, чтобы меридианы были повсюду перпендикулярны параллелям. Вот почему обе дифференциальные формулы, о которых говорилось, что они являются полными дифференциалами, будут, как уже было найдено в § 12, следующими:

$$\begin{aligned} dx &= m \cos \varphi du + n \sin \varphi dt, \\ dy &= m \sin \varphi du - n \cos \varphi dt. \end{aligned}$$

Затем (см. рис. 2),

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{p^2 + r^2} du = m du, \\ PR &= \sqrt{q^2 + s^2} dt = n dt, \end{aligned}$$

в то время как угол QPR , согласно написанным выше формулам, разумеется, остается прямым.

§ 25. Если прямоугольник $PQSR$ подобен прямоугольнику $pqsr$ (см. рис. 1 и 2), то требуется, чтобы

$$PQ : PR = pq : pr,$$

т. е.

$$m : n = 1 : \cos u$$

или

$$n = m \cos u.$$

Наши два дифференциальных выражения примут вид

$$\begin{aligned} dx &= m \cos \varphi du + m \cos u \sin \varphi dt, \\ dy &= m \sin \varphi du - m \cos u \cos \varphi dt. \end{aligned}$$

§ 26. Вся наша задача сводится теперь к тому, чтобы установить, какие надо взять функции от t и u для m и φ , чтобы написанные выше выражения были полными дифференциалами. Для краткости мы вновь введем p и r вместо m и φ .

В § 12 было принято

$$p = m \cos \varphi, \quad r = m \sin \varphi;$$

тогда имеем уравнения

$$\begin{aligned} dx &= p du + r \cos u dt, \\ dy &= r du - p \cos u dt; \end{aligned}$$

спрашивается, какие функции от t и u нужно взять для p и r , чтобы написанные выше выражения были полными дифференциалами. Как легко видеть, решение этой задачи получено для случая морских карт; для вывода найденных нами для них формул нужно было только принять

$$p = 0, \quad r = \frac{1}{\cos u}.$$

Но другие решения не так просто угадать.

§ 27. На основании известных условий для интегрирования в первую очередь требуется, чтобы удовлетворялись уравнения:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{d(r \cos u)}{du} = -r \sin u + \cos u \frac{dr}{du},$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{d(p \cos u)}{du} = p \sin u - \cos u \frac{dp}{du}.$$

Последнее из этих уравнений даст

$$\frac{dp}{du} = p \operatorname{tg} u - \frac{1}{\cos u} \frac{dr}{dt},$$

и тогда

$$dp = \frac{dp}{du} du + \frac{dp}{dt} dt$$

получает следующее новое условие

$$dp = p \operatorname{tg} u \, du - \frac{dr}{dt} \frac{du}{\cos u} - r \sin u \, dt + \frac{dr}{du} \cos u \, dt.$$

Умножаем его на $\cos u$ и переносим в левую часть первый член правой части, тогда получаем

$$\cos u \, dp - p \sin u \, du = -r \sin u \cos u \, dt + \frac{dr}{du} \cos^2 u \, dt - \frac{dr}{dt} du.$$

Так как в этом уравнении выражение, стоящее в левой части, представляет собой полный дифференциал, то, чтобы таким же было и выражение, стоящее в правой части, нужно подыскать для r соответствующую функцию от t и u^2 .

§ 28. Теперь следует наметить подходящий путь для решения этой задачи. Согласно более зрелому рассмотрению всех предстоящих затруднений, мне представились два способа для достижения этой цели. Один из них дает бесчисленное количество частных решений, в то время как второй приводит к самому общему решению. Я здесь подробно рассмотрю оба способа, так как при помощи их, по-видимому, можно получить замечательный успех в теории (продвиг в анализе) функций двух переменных.

Метод нахождения частных решений
дифференциальных уравнений

$$dx = p \, du + r \cos u \, dt, \quad dy = r \, du - p \cos u \, dt.$$

§ 29. Так как функции p и r содержат две переменные u и t , то будем считать каждую из них произведением некоторой функции от u на некоторую функцию от t .

Итак, пусть

$$p = U \cdot T, \quad r = VQ,$$

где U и V — функции от одного u , а T и Q — функции от одного t .

Тогда будем иметь два выражения, которые должны представлять собой полные дифференциалы следующей формы:

$$\text{I. } dx = UT \, du + VQ \cos u \, dt,$$

$$\text{II. } dy = VQ \, du - UT \cos u \, dt.$$

§ 30. Из них при помощи интегрирования можно вывести два вида выражений для x и y . Если t рассматривать как постоянную, а потому пропадут последние члены в выражениях для x и y , тогда из первых членов получим

$$x = T \int U du, \quad y = Q \int V du.$$

Если же, наоборот, рассматривать u как постоянную, то из последних членов получим

$$x = V \cos u \int Q dt, \quad y = -U \cos u \int T dt.$$

Следовательно, имеем по два значения для x и y ; приравняв их, получаем

$$T \int U du = V \cos u \int Q dt \quad \text{или} \quad \frac{\int U du}{V \cos u} = \frac{\int Q dt}{T};$$

$$Q \int V du = -U \cos u \int T dt \quad \text{или} \quad \frac{\int V du}{U \cos u} = -\frac{\int T dt}{Q}.$$

Из этих двух уравнений нужно получить функции U , V , T и Q .

§ 31. Если должно быть

$$\frac{\int U du}{V \cos u} = \frac{\int Q dt}{T},$$

то, очевидно, обе дроби должны равняться одной постоянной величине, так как обе переменные u и t не зависят одна от другой. Значение этой постоянной примем α , тогда

$$\int U du = \alpha V \cos u \quad \text{и} \quad \int Q dt = \alpha T.$$

Точно так же должно быть

$$\frac{\int V du}{U \cos u} = -\frac{\int T dt}{Q},$$

тогда каждая из этих дробей будет равна постоянной β , т. е.

$$\int V du = \beta U \cos u, \quad \int T dt = -\beta Q.$$

§ 32. Затем примем для краткости

$$U \cos u = P, \quad V \cos u = Q,$$

следовательно,

$$U = \frac{P}{\cos u}, \quad V = \frac{Q}{\cos u}.$$

Наши четыре формулы примут вид

$$\int Q dt = \alpha T \quad \text{и} \quad \int T dt = -\beta Q;$$

$$\int \frac{P du}{\cos u} = \alpha Q \quad \text{и} \quad \int \frac{Q du}{\cos u} = \beta P.$$

Дифференцируя первые уравнения обоих рядов, получаем

$$Q = \alpha \frac{dT}{dt}, \quad P = \alpha \cos u \frac{dQ}{du};$$

подставляя эти выражения в два остающихся уравнения, получаем

$$\int T dt = -\alpha\beta \frac{dT}{dt} \quad \text{и} \quad \int \frac{Q du}{\cos u} = \alpha\beta \cos u \frac{dQ}{du}.$$

§ 33. Дифференцируя два последних уравнения еще раз по t и по u , получаем уравнения

$$T = -\alpha\beta \frac{d^2 T}{dt^2}, \quad Q = \alpha\beta \cos^2 u \frac{d^2 Q}{du^2} - \alpha\beta \sin u \cos u \frac{dQ}{du}.$$

Таким образом, мы пришли к двум дифференциальным уравнениям второго порядка, от интегрирования которых зависит решение нашей задачи.

§ 34. Начнем с первого уравнения

$$T = -\alpha\beta \frac{d^2 T}{dt^2}.$$

Умножим его на $2 \frac{dT}{dt}$ и произведем интегрирование, тогда получим

$$T^2 = -\alpha\beta \left(\frac{dT}{dt} \right)^2 + A$$

и затем

$$dt^2 = -\frac{\alpha\beta (dT)^2}{A - T^2}.$$

Точно так же из второго уравнения

$$Q = \alpha\beta \cos^2 u \frac{d^2 Q}{du^2} - \alpha\beta \sin u \cos u \frac{dQ}{du},$$

умножив его на $2 \frac{dQ}{du}$ и произведя интегрирование, получим

$$Q^2 = \alpha\beta \cos^2 u \left(\frac{dQ}{du} \right)^2 + B$$

и затем

$$\frac{(du)^2}{\cos^2 u} = \frac{\alpha\beta (dQ)^2}{Q^2 - B}.$$

При дальнейшем интегрировании мы должны различать два случая, смотря по тому, будет ли величина $\alpha\beta$ положительной или отрицательной.

Первый случай

Пусть $\alpha\beta = +\lambda^2$, следовательно, $\beta = +\frac{\lambda^2}{\alpha}$.

§ 35. В этом случае мы имеем

$$(dt)^2 = \frac{\lambda^2 (dT)^2}{A - T^2};$$

так как A — положительная величина, то можем положить здесь $A = a^2$. Тогда

$$dt = \frac{\lambda dT}{\sqrt{a^2 - T^2}}$$

и после интегрирования получим

$$t + \delta = \lambda \arcsin \left(\frac{T}{a} \right),$$

откуда

$$T = a \sin \left(\frac{t + \delta}{\lambda} \right).$$

Затем, так как

$$Q = \alpha \frac{dT}{dt},$$

то получается

$$Q = \frac{\alpha a}{\lambda} \cos \left(\frac{t + \delta}{\lambda} \right).$$

§ 36. Второе уравнение надлежит интегрировать при $\alpha\beta = +\lambda^2$.

$$\frac{du}{\cos u} = \frac{\lambda dQ}{\sqrt{Q^2 - B}};$$

интеграл его равен

$$\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right) + \lambda \ln \varepsilon = \lambda \ln (Q + \sqrt{Q^2 - B}).$$

Чтобы привести это уравнение к более удобному виду, положим, что

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right) = s,$$

откуда

$$\ln s = \int \frac{du}{\cos u}, \quad \frac{ds}{s} = \frac{du}{\cos u}$$

и

$$\frac{ds}{du} = \frac{s}{\cos u}.$$

Написанное выше уравнение примет вид

$$\ln (\varepsilon^\lambda s) = \lambda \ln (Q + \sqrt{Q^2 - B}),$$

откуда

$$\varepsilon^\lambda s = (Q + \sqrt{Q^2 - B})^\lambda \quad \text{или} \quad Q + \sqrt{Q^2 - B} = \varepsilon s^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Для сокращения примем $\frac{1}{\lambda} = \nu$ и решим это выражение относительно Q , тогда получим

$$Q = \frac{1}{2} \varepsilon s^\nu + \frac{Bs^{-\nu}}{2\varepsilon}.$$

Затем получим

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{ds} &= \frac{1}{2} \nu \varepsilon s^{\nu-1} - \frac{\nu B}{2\varepsilon} s^{-(\nu+1)}, \\ \frac{dQ}{du} &= \frac{dQ}{ds} \frac{s}{\cos u} = \frac{\frac{1}{2} \nu \varepsilon s^{\nu}}{\cos u} - \frac{\nu B}{2\varepsilon} \frac{s^{-\nu}}{\cos u}, \\ P &= \alpha \cos u \frac{dQ}{du} = \frac{1}{2} \alpha \nu \varepsilon s^{\nu} - \frac{\alpha \nu B s^{-\nu}}{2\varepsilon}.\end{aligned}$$

§ 37. На основании найденных выше значений P и Q получается

$$U = \frac{\alpha \nu \varepsilon s^{\nu}}{2 \cos u} - \frac{\alpha \nu B s^{-\nu}}{2\varepsilon \cos u}, \quad V = \frac{\varepsilon s^{\nu}}{2 \cos u} + \frac{B s^{-\nu}}{2\varepsilon \cos u},$$

и, наконец, отсюда получаются формулы для x и y

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} \alpha a \sin \left(\frac{t + \delta}{\lambda} \right) \cdot \left(\varepsilon s^{\nu} + \frac{B}{\varepsilon} s^{-\nu} \right), \\ y &= \frac{1}{2} \alpha \nu \lambda a \cos \left(\frac{t + \delta}{\lambda} \right) \cdot \left(\varepsilon s^{\nu} - \frac{B}{\varepsilon} s^{-\nu} \right),\end{aligned}$$

где

$$\nu = \frac{1}{\lambda}, \quad s = \operatorname{tg} \left(45^{\circ} + \frac{1}{2} u \right).$$

Написанные выше формулы будут еще изящнее, если мы примем $B = \varepsilon^2 b$. Тогда они примут вид

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} \alpha \varepsilon a \sin \left(\frac{t + \delta}{\lambda} \right) \cdot \left(s^{\frac{1}{\lambda}} + b s^{-\frac{1}{\lambda}} \right), \\ y &= \frac{1}{2} \alpha \varepsilon a \cos \left(\frac{t + \delta}{\lambda} \right) \cdot \left(s^{\frac{\mu}{\lambda}} - b s^{-\frac{1}{\lambda}} \right).\end{aligned}$$

Второй случай

Пусть $\alpha\beta = -\mu^2$, следовательно $\beta = -\frac{\mu^2}{\alpha}$.

§ 38. В этом случае имеем

$$(dt)^2 = \frac{-\mu^2 (dT)^2}{A - T^2},$$

а отсюда

$$dt = \frac{\mu dT}{\sqrt{T^2 - A}}.$$

После интегрирования получаем

$$t + \delta = \mu \ln (T + \sqrt{T^2 - A})$$

или, обозначая через e основание натуральных логарифмов,

$$e^{\frac{t+\delta}{\mu}} = T + \sqrt{T^2 - A}.$$

Для краткости обозначим

$$\frac{t + \delta}{\mu} = \vartheta,$$

причем $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{\mu}$, тогда

$$e^{\vartheta} - T = \sqrt{T^2 - A},$$

откуда

$$T = \frac{e^{2\vartheta} + A}{2e^{\vartheta}} = \frac{1}{2} e^{\vartheta} + \frac{1}{2} A e^{-\vartheta}.$$

Далее получим

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\mu} \frac{dT}{d\vartheta} = \frac{1}{2\mu} (e^{\vartheta} - A e^{-\vartheta}),$$

откуда

$$Q = \frac{a}{2\mu} (e^{\vartheta} - A e^{-\vartheta}).$$

§ 39. Затем в этом случае получится

$$\frac{(du)^2}{\cos^2 u} = \frac{-\mu^2 (dQ)^2}{Q^2 - B} = \frac{\mu^2 (dQ)^2}{B - Q^2}.$$

Так как B обязательно должно быть положительным, то поставим здесь $B = b^2$, тогда

$$\frac{du}{\cos u} = \frac{\mu dQ}{\sqrt{b^2 - Q^2}}.$$

Интегрирование дает

$$\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right) + \ln \varepsilon = \mu \arcsin \left(\frac{Q}{b} \right),$$

т. е. если опять принять

$$\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right) = s,$$

то

$$\frac{\ln(\varepsilon s)}{\mu} = \arcsin \left(\frac{Q}{b} \right),$$

откуда обратно

$$Q = b \sin \left(\frac{\ln(\varepsilon s)}{\mu} \right).$$

Далее получим

$$\frac{dQ}{ds} = \frac{b}{\mu} \frac{1}{s} \cos \left(\frac{\ln(\varepsilon s)}{\mu} \right)$$

и

$$\frac{dQ}{du} = \frac{dQ}{ds} \frac{s}{\cos u} = \frac{b}{\mu \cos u} \cos \left(\frac{\ln(\varepsilon s)}{\mu} \right)$$

и, наконец,

$$P = \frac{\alpha b}{\mu} \cos \left(\frac{\ln(\varepsilon s)}{\mu} \right)$$

§ 40. Теперь мы имеем (согласно § 31 и 32)

$$x = \alpha TV \cos u = \alpha TQ, \quad y = \beta QP = \frac{-\mu^2}{\alpha} QP,$$

следовательно,

$$x = \frac{1}{2} \alpha b \sin \left(\frac{\ln(\varepsilon s)}{\mu} \right) \cdot (e^{\vartheta} + Ae^{-\vartheta}),$$

$$y = -\frac{1}{2} \alpha b \cos \left(\frac{\ln(\varepsilon s)}{\mu} \right) \cdot (e^{\vartheta} - Ae^{-\vartheta}),$$

отсюда

$$\vartheta = \frac{t + \delta}{\mu}; \quad s = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right).$$

§ 41. Так как в предыдущих формулах некоторые величины полностью произвольные, то при помощи их мы имеем вполне общее решение нашей задачи, которое охватывает бесчисленное множество частных случаев. Однако еще более общее решение получим, если свяжем между собой два или любое число решений в указанной выше форме, т. е. сначала найдем $x = M, y = N$; затем $x = M', y = N'$, потом $x = M'', y = N''$ и т. д.; тогда можно на основании их образовать более общие решения

$$x = \mathfrak{A}M + \mathfrak{B}M' + \mathfrak{C}M'' + \dots,$$

$$y = \mathfrak{A}N + \mathfrak{B}N' + \mathfrak{C}N'' + \dots$$

И действительно, такое решение является настолько общим, что оно заключает в себе все возможные решения.

Способ получения общего решения
дифференциальных уравнений

$$dx = p du + r \cos u dt, \quad dy = r du - p \cos u dt.$$

§ 42. Мы постараемся найти такую комбинацию написанных выше двух уравнений, чтобы получить разложение на два множителя правых частей. Для этой цели помножим первое из них на α , а второе — на β и сложим, тогда получим

$$\alpha dx + \beta dy = p(\alpha du - \beta \cos u dt) + r(\beta du + \alpha \cos u dt).$$

Чтобы привести к одинаковой форме множители, содержащие дифференциалы, расположим их так:

$$\alpha dx + \beta dy = \alpha p \left(du - \frac{\beta}{\alpha} \cos u dt \right) + \beta r \left(du + \frac{\alpha}{\beta} \cos u dt \right).$$

Если $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha}$ и, следовательно, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ или $\beta = \alpha \sqrt{-1}$, то наша комбинация дает

$$dx + dy \sqrt{-1} = (p + r \sqrt{-1}) (du - \sqrt{-1} \cos u dt).$$

Чтобы дифференциальный множитель в правой части стал полным дифференциалом, напомним последнее уравнение в виде

$$dx + dy \sqrt{-1} = \cos u \cdot (p + r \sqrt{-1}) \left(\frac{du}{\cos u} - dt \sqrt{-1} \right).$$

§ 43. Положим теперь, что

$$\frac{du}{\cos u} - dt \sqrt{-1} = dz,$$

следовательно,

$$z = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right) - t \sqrt{-1},$$

тогда

$$dx + dy \sqrt{-1} = \cos u \cdot (p + r \sqrt{-1}) dz;$$

и правая часть этого уравнения, очевидно, будет только тогда полным дифференциалом, когда последний множитель $\cos u \cdot (p + r \sqrt{-1})$ будет функцией от z ; но какой бы функции от z он ни был равен, всегда можно предполагать, что ее удастся проинтегрировать. Отсюда следует, что интегралом будет также функция от z , так что выражение $x + y \sqrt{-1}$ равно любой функции от z , т. е. от величины

$$\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right) - t \sqrt{-1}.$$

§ 44. Формула станет изящнее, если мы, как и выше, подставим

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right) = s,$$

так что

$$\frac{ds}{s} = \frac{du}{\cos u} \text{ и } z = \ln s - t \sqrt{-1}.$$

Обозначим, как обычно, через Γ^* любую функцию поставленного в скобки аргумента и напомним, следовательно,

$$x + y \sqrt{-1} = \Gamma(\ln s - t \sqrt{-1})$$

или, что то же самое,

$$x + y \sqrt{-1} = 2\Gamma(\ln s - t \sqrt{-1})^3.$$

Так как выражение $\sqrt{-1}$ по своей природе имеет двойной знак (\pm), то может также получиться

$$x - y \sqrt{-1} = 2\Gamma(\ln s + t \sqrt{-1}),$$

* Гамма — функция введена впервые Эйлером в 1729 г. и представляет собой второй интеграл Эйлера

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx; \quad \Gamma(p) = 1. \ 2. \ 3 \dots (p-1),$$

при p целом и положительном. (Прим. ред.).

а из двух уравнений следует

$$\begin{aligned}x &= \Gamma(\ln s - t \sqrt{-1}) + \Gamma(\ln s + t \sqrt{-1}), \\y \sqrt{-1} &= \Gamma(\ln s - t \sqrt{-1}) - \Gamma(\ln s + t \sqrt{-1}).\end{aligned}$$

Эти выражения, как известно, для x и y можно привести к вещественным значениям.³

§ 45. Возможно, что Γ , например, будет обозначать какую-нибудь степень заключенного в скобки аргумента или даже многократно умноженную величину такой степени, и Γ — показатель этой степени, тогда, произведя разложение в ряд и полагая для краткости $\ln s = v$, получаем:

$$\begin{aligned}x &= v^\lambda - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} v^{\lambda-2} t^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1.2.3.4} v^{\lambda-4} t^4 - \\&\quad - \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-5)}{1.2\dots6} v^{\lambda-6} t^6 + \dots, \\y &= \lambda v^{\lambda-1} t - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2.3} v^{\lambda-3} t^3 + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-4)}{1.2\dots5} v^{\lambda-5} t^5 - \\&\quad - \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-6)}{1.2\dots7} v^{\lambda-7} t^7 + \dots\end{aligned}$$

В сущности, значение y должно было бы иметь противоположные знаки, но, как это следует из природы вещей, можно менять без особых о том упоминаний положительные и отрицательные направления у обеих осей координат x и y .

§ 46. По-видимому, эти значения совершенно отличаются от тех, которые дает нам приведенное выше частное решение. Но, кроме того, для морских карт они оказываются вполне пригодными (формулы § 45), чего мы не можем сказать о выведенных выше формулах (в § 37 и 40). Обыкновенно принимают $\lambda = 1$, тогда получается:

$$x = \ln s = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right), \quad y = t.$$

То обстоятельство, что значения x и y поменялись местами, не имеет значения, потому что замена осей координат x и y может всегда производиться.

§ 47. Так как известно, что все найденные прежде значения должны также содержаться и в формулах, выведенных выше, потому что последние представляя собой решение в самом общем виде, поэтому стоит потрудиться, чтобы показать это в действительности. Заметим, что если $\Gamma(z)$ обозначает любую функцию от z , то можно принять также $\Delta(Z)$, где Z в свою очередь — некоторая функция от z . Примем теперь $Z = e^{xz}$, причем $z = \ln s - t \sqrt{-1}$, тогда вместо $\Gamma(\ln s - t \sqrt{-1})$ можно написать $\Delta(e^{x(\ln s - t \sqrt{-1})})$. Но мы имеем

$$e^{x \ln s} = s^x,$$

затем

$$e^{x \sqrt{-1} t} = \cos \alpha t \pm \sqrt{-1} \sin \alpha t,$$

откуда

$$e^{x(\ln s - t \sqrt{-1})} = s^x (\cos \alpha t - \sqrt{-1} \sin \alpha t).$$

Подставим затем $\Delta(Z)$ вместо $\Gamma(z)$, тогда формулы § 44 примут вид

$$x = \Delta \left(s^\alpha (\cos \alpha t - \sqrt{-1} \sin \alpha t) \right) + \Delta \left(s^\alpha (\cos \alpha t + \sqrt{-1} \sin \alpha t) \right),$$

$$y \sqrt{-1} = \Delta \left(s^\alpha (\cos \alpha t - \sqrt{-1} \sin \alpha t) \right) - \\ - \Delta \left(s^\alpha (\cos \alpha t + \sqrt{-1} \sin \alpha t) \right);$$

при этом надо заметить, что эти два значения можно не только умножить на любые постоянные величины, но и поменять одну другой.

§ 48. Рассматривая частный случай $\Delta(Z) = Z$, получаем

$$x = 2s^\alpha \cos \alpha t, \quad y = 2s^\alpha \sin \alpha t.$$

Вместо α можем также принять $-\alpha$ и тогда получим второе решение, т. е.

$$x = 2s^{-\alpha} \cos \alpha t, \quad y = -2s^{-\alpha} \sin \alpha t.$$

Выше уже было отмечено, что два решения всегда можно так комбинировать, что оба они будут умножены на постоянные числа, а затем сложены. Таким образом, из двух написанных выше решений можно образовать более общее

$$x = (2s^\alpha + 2s^{-\alpha}) \cos \alpha t, \quad y = (2s^\alpha - 2s^{-\alpha}) \sin \alpha t.$$

В этих формулах заключается решение, данное в § 37. Но по виду формулы, заключающие в себе функцию Δ , гораздо более общие.

§ 49. Чтобы вывести из наших общих формул также и второе частное решение (§ 40), положим

$$Z = \cos \alpha z = \cos (\alpha \ln s - \alpha t \sqrt{-1}) = \\ = \cos (\alpha \ln s) \cos (\alpha t \sqrt{-1}) + \sin (\alpha \ln s) \sin (\alpha t \sqrt{-1}).$$

Но известно, что

$$\cos (\alpha t \sqrt{-1}) = \frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2}$$

и

$$\sin (\alpha t \sqrt{-1}) = \frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}},$$

откуда

$$Z = \frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2} \cos (\alpha \ln s) + \frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}} \sin (\alpha \ln s);$$

и мы поэтому имеем

$$x = \Delta \left(\cos (\alpha \ln s) \cdot \frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2} + \sin (\alpha \ln s) \cdot \frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}} \right) + \\ + \Delta \left(\cos (\alpha \ln s) \cdot \frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2} - \sin (\alpha \ln s) \cdot \frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}} \right), \\ y \sqrt{-1} = \Delta \left(\cos (\alpha \ln s) \cdot \frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2} + \sin (\alpha \ln s) \cdot \frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}} \right) - \\ - \Delta \left(\cos (\alpha \ln s) \cdot \frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2} - \sin (\alpha \ln s) \cdot \frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}} \right).$$

Если теперь опять примем $\Delta(Z)=Z$, то получим

$$x = \cos(\alpha \ln s) \cdot (e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}), \quad y\sqrt{-1} = \sin(\alpha \ln s) \cdot \frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{1 - 1};$$

и если мы возьмем α отрицательное, то

$$x = \cos(\alpha \ln s) \cdot (e^{+\alpha t} + e^{-\alpha t}), \quad y\sqrt{-1} = -\sin(\alpha \ln s) \cdot \frac{e^{+\alpha t} - e^{-\alpha t}}{1 - 1}.$$

Решение второго случая, приведенное в § 40, заключается в этих формулах.

§ 50. В приведенных выше самых общих формулах, выведенных для определения x и y (§ 44), заключаются все возможные изображения, при которых поверхность шара проектируется на плоскость так, что меридианы и параллели пересекаются под прямыми углами, и в то же время все чрезвычайно малые фигуры, взятые в любом месте шара, будут перенесены на плоскость подобными фигурами.

§ 51. В это общее решение входит также проекция, с помощью которой обыкновенно изображают земные полушария в виде окружностей, в центрах которых лежат оба полюса. Эта проекция получается из выведенных в § 48 формул

$$x = s^2 \cos \alpha t, \quad y = s^2 \sin \alpha t,$$

если мы примем в них $\alpha = -1$, то получится

$$x = \frac{\cos t}{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}u\right)}, \quad y = \frac{\sin t}{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}u\right)}.$$

Тогда именно в полюсах, в которых, конечно, $u = 90^\circ$, x и y обратятся в нуль. Но на экваторе, где $u = 0^\circ$, получим $s = 1$, откуда

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Следовательно, экватор изображается кругом, описанным вокруг полюса радиусом, равным единице. Далее, для всех точек, имеющих одну и ту же долготу t , имеем $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} t$; в таком случае меридианы изображаются радиусами этого круга. Наконец, изображение параллели с широтой u представляет собой круг, концентричный с экватором; радиус этого круга равен

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}u\right)} = \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{1}{2}u\right),$$

т. е. радиус равен тангенсу половины расстояния до полюса. Согласно этому условию обыкновенно вычерчивают такие карты обоих полушарий.⁴

ТРЕТЬЕ ДОПУЩЕНИЕ

Все области на Земле должны быть представлены на плоскости в их истинной величине.

§ 52. Будем исходить из общих формул (§ 8) для dx и dy

$$dx = p du + q dt, \quad dy = r du + s dt$$

и опять предположим, что меридианы пересекаются параллелями под прямыми углами. Тогда должно выполняться следующее условие:

$$\frac{s}{q} = -\frac{p}{r}.$$

Примем, что

$$s = -np, \quad q = +nr,$$

откуда

$$dx = p du + nr dt, \quad dy = r du - np dt.$$

В таком случае элемент меридиана равен

$$PQ = \sqrt{p^2 + r^2} \cdot du$$

и параллели

$$PR = \sqrt{p^2 + r^2} \cdot n dt.$$

Тогда площадь прямоугольника PQSR равна

$$n du dt \cdot (p^2 + r^2),$$

между тем как на шаре соответствующая площадь $pqsr$ равна

$$du dt \cdot \cos u.$$

Оба выражения должны быть равны, следовательно, получим

$$n(p^2 + r^2) = \cos u \text{ и отсюда } n = \frac{\cos u}{p^2 + r^2}.$$

Наше допущение приводит поэтому к следующим формулам:

$$dx = p du + \frac{r \cos u dt}{p^2 + r^2}; \quad dy = r du - \frac{p \cos u dt}{p^2 + r^2}.$$

В дальнейшем задача состоит в том, чтобы найти для p и r такие функции, при которых оба написанные выше выражения будут полными дифференциалами.

§ 53. Для облегчения вычисления положим

$$p = m \cos \varphi, \quad r = m \sin \varphi,$$

так что

$$p^2 + r^2 = m^2.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} dx &= m \cos \varphi du + \frac{1}{m} \cos u \sin \varphi dt, \\ dy &= m \sin \varphi du - \frac{1}{m} \cos u \cos \varphi dt. \end{aligned}$$

Далее, положим, что

$$m = k \cos u,$$

так что

$$dx = k \cos u \cos \varphi du + \frac{1}{k} \sin \varphi dt,$$

$$dy = k \cos u \sin \varphi du - \frac{1}{k} \cos \varphi dt.$$

Наконец, положим

$$\cos u du = dv, \text{ т. е. } v = \sin u,$$

тогда предшествующие уравнения примут вид

$$dx = k \cos \varphi dv + \frac{1}{k} \sin \varphi dt,$$

$$dy = k \sin \varphi dv - \frac{1}{k} \cos \varphi dt;$$

остается получить соответствующие значения для k и φ .

§ 54. Так как не известно ни одного способа, с помощью которого можно получить общее решение написанных выше уравнений, то поищем частные решения⁵. Прежде всего у нас имеется решение в § 22 рассмотренного случая, в котором было $x = t$, $y = \sin u$. Эти значения получаются из наших формул, если в последних мы примем $k = 1$ и $= 90^\circ$. Затем увидим, что получилось бы несколько более общее решение, если принять для k и φ любые постоянные значения. Пусть $k = a$, $\varphi = \alpha$, тогда найдем

$$x = av \cos \alpha + \frac{t \sin \alpha}{a}, \quad y = av \sin \alpha - \frac{t \cos \alpha}{a}.$$

Это решение отличается от предыдущего только тем, что меридианы больше не перпендикулярны нашей оси EF , но наклонены к ней на угол α . Параллельные круги пересекают все меридианы под прямыми углами и точно так же представляют собой параллельные прямые линии.

§ 55. Другие решения получаются таким образом, что для одной из величин k и φ мы подбираем функцию, зависящую только от v , а для другой — функцию, зависящую только от t . Итак, пусть $k = T$ и $\varphi = V$, тогда получим

$$dx = T \cos V dv + \frac{1}{T} \sin V dt,$$

$$dy = T \sin V dv - \frac{1}{T} \cos V dt.$$

Отсюда следует

$$x = T \int \cos V dv = \sin V \int \frac{dt}{T},$$

$$y = T \int \sin V dv = -\cos V \int \frac{dt}{T};$$

оба выражения для x должны быть равны, равно как и выражения для y .

§ 56. На основании равенства двух выражений для x приходим к выводу, что

$$\frac{\int \cos V dv}{\sin V} = \frac{1}{T} \int \frac{dt}{T} = \alpha;$$

затем из обоих выражений для y имеем

$$\frac{\int \sin V dv}{\cos V} = -\frac{1}{T} \int \frac{dt}{T} = \beta.$$

При этом для функции T мы имеем два уравнения

$$\int \frac{dt}{T} = \alpha T \text{ и } \int \frac{dt}{T} = -\beta T,$$

отсюда получается, что должно быть $\beta = -\alpha$.

С помощью дифференцирования имеем

$$\frac{dt}{T} = \alpha dT, \text{ откуда } T = \sqrt{\frac{2t}{\alpha}}.$$

Но для V имеем

$$\int \cos V dv = \alpha \sin V \text{ и } \int \sin V dv = -\alpha \cos V.$$

Дифференцируя эти выражения, получаем из обоих уравнений $dv = \alpha dV$, откуда $V = \frac{v}{\alpha}$, или в более общем виде

$$V = \frac{v + c}{\alpha}.$$

§ 57. С помощью этих значений находим

$$\int \cos V dv = \alpha \sin V = \alpha \sin \frac{v + c}{\alpha}$$

и

$$\int \frac{dt}{T} = \alpha T = \sqrt{2\alpha t},$$

а для координат получим выражения

$$x = \sqrt{2\alpha t} \sin \frac{v + c}{\alpha}, \quad y = -\sqrt{2\alpha t} \cos \frac{v + c}{\alpha}.$$

Отсюда заключаем, что

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2\alpha t},$$

т. е. все пункты местности с одинаковой долготой t лежат на карте на окружности круга радиуса $\sqrt{2\alpha t}$. Сами меридианы будут изображены тогда концентрическими кругами; начальный меридиан для $t = 0^\circ$ будет даже совпадать с общим центром, вокруг которого проведены эти круги. Отсюда вытекает, что все параллели изображаются радиусами упомянутых выше концентрических кругов. Очевидно, что такая проекция совершенно нецелесообразна, если бы даже она отвечала всем поставленным заранее условиям.

§ 58. Примем для k функцию от v , которая равна V , в то время как угол φ — функция от t , равная T . Тогда получим

$$dx = V \cos T dv + \frac{1}{V} \sin T dt,$$

$$dy = V \sin T dv - \frac{1}{V} \cos T dt;$$

отсюда для x и y получаются следующие значения:

$$x = \cos T \int V dv = \frac{1}{V} \int \sin T dt,$$

$$y = \sin T \int V dv = -\frac{1}{V} \int \cos T dt.$$

Из этих уравнений следует

$$V \int V dv = \frac{1}{\cos T} \int \sin T dt = \alpha,$$

$$-V \int V dv = \frac{1}{\sin T} \int \cos T dt = -\beta.$$

Оба выражения для V показывают, что должно существовать равенство $\beta = \alpha$. Дифференцируя, получаем

$$V dv = -\frac{\alpha dV}{V^2} \quad \text{или} \quad dv = -\frac{\alpha dV}{V^3},$$

а интегрируя, находим

$$v + c = \frac{\alpha}{2V^2} \quad \text{или} \quad V = \sqrt{\frac{\alpha}{2(v+c)}}.$$

Для функции T имеем два уравнения

$$\int \sin T dt = \alpha \cos T \quad \text{и} \quad \int \cos T dt = -\alpha \sin T;$$

дифференцируя их, получаем

$$dt = -\alpha dT, \quad \text{следовательно,} \quad T = -\frac{t}{\alpha}.$$

§ 59. На основании найденных только что значений, если при том принять во внимание, что

$$\int V dv = \sqrt{2\alpha(v+c)},$$

получим

$$x = \sqrt{2\alpha(v+c)} \cos \frac{t}{\alpha}, \quad y = -\sqrt{2\alpha(v+c)} \sin \frac{t}{\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \frac{t}{\alpha}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2\alpha(v+c)}.$$

Первое из этих уравнений показывает, что все меридианы изображаются прямыми линиями, которые, подобно лучам, исходят из некоторой определенной точки. Второе уравнение показывает, что все парал-

лели проходят на карте концентрическими кругами. Такой способ изображения чрезвычайно удобен для составления карт двух данных полушарий с помощью кругов, центрами которых являются изображения полюсов, причем фигура любой области не слишком отличается от действительности, между тем как истинную площадь ее можно непосредственно измерить на карте.⁶

§ 60. Приведенные выше три допущения заключают в себе все требования, которые можно предъявить для географических (Landkarte) и морских карт. Второе из этих допущений охватывает даже, как показало произведенное выше исследование, все изображения, которые только возможны. Но вследствие слишком большой общности полученных здесь формул не легко вывести на основании их такие методы, которые были бы применимы на практике. В настоящем исследовании не рассматриваются детали практического применения, тем более что все употребительные проекции достаточно подробно уже рассмотрены другими авторами.

II

De projectione geographica superficiei sphaericae

Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae pro anno
MDCCLXXVII

(T. I, p. 133—142)

II

О географической проекции поверхности шара

Труды Петербургской академии наук за 1777 г.

(Том 1, стр. 133 — 142)

§ 1. В предыдущей статье я рассмотрел возможные способы такого изображения поверхности шара на плоскости, при которых наименьшие ее части передаются подобными фигурами. Отсюда получается построение морских карт Меркатора, а также карт северного и южного полушарий. Но обычно применяемый в настоящее время способ построения карт полушарий, как северного, так и южного, на основании моих формул страдает отсутствием ясности, хотя бы такие карты и удовлетворяли упомянутому выше свойству. Это обстоятельство побудило меня подробнее исследовать вопрос, как указанный способ изображения зависит от данных нами общих формул и может наилучшим образом выводиться из них.

§ 2. Для построения таких картографических проекций я вывел следующие общие формулы. Пусть для некоторой точки на шаре v — расстояние от полюса, t — долгота, вычисленная относительно некоторого определенного начального меридиана, а x и y — прямоугольные координаты, которые определяют положение соответствующей ей точки на плоскости, тогда получим⁷

$$x = \Delta \left(\lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2} v + t \sqrt{-1} \right) + \Delta \left(\lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2} v - t \sqrt{-1} \right),$$

$$y \sqrt{-1} = \Delta \left(\lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2} v + t \sqrt{-1} \right) - \Delta \left(\lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2} v - t \sqrt{-1} \right).$$

Первое из этих уравнений можно написать следующим образом:

$$x = \Delta \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} v \cdot (\cos t + \sqrt{-1} \sin t) \right] + \Delta \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} v \cdot (\cos t - \sqrt{-1} \sin t) \right],$$

и в таком же виде напомним и второе уравнение. Затем примем во внимание, что

$$\frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} v \cdot (\cos t \pm \sqrt{-1} \sin t)} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \cdot (\cos t \mp \sqrt{-1} \sin t);$$

в таком случае написанным выше формулам можно придать вид

$$x = \Delta \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} v \cdot (\cos t + \sqrt{-1} \sin t) \right] + \Delta \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} v \cdot (\cos t - \sqrt{-1} \sin t) \right],$$

$$y \sqrt{-1} = \Delta \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} v \cdot (\cos t + \sqrt{-1} \sin t) \right] - \\ - \Delta \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} v \cdot (\cos t - \sqrt{-1} \sin t) \right].$$

Если отбросить знак Δ , обозначающий некоторую неопределенную функцию, то, как легко видеть, оба первых уравнения § 2 немедленно превратятся в формулы для морских карт, между тем как два последних уравнения послужат для построения северного и южного полушарий.

§ 3. Чтобы легче пояснить, как получить из наших формул и другие проекции, опирающиеся на тот же принцип, я постараюсь здесь подробно развить основные начала проекции, которую обыкновенно называют стереографической. В этой проекции поверхность шара переносят на касательную к шару

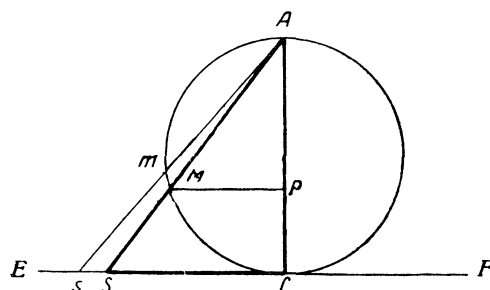


Рис. 4.

плоскость так, как ее видел бы наблюдатель на основании правил перспективы, если бы он находился на противоположной точке поверхности шара.⁸ Пусть круг AMC представляет шар (рис. 4), а линия EF — плоскость, соприкасающаяся с шаром в точке C . Тогда точка, в которой находится наблюдатель, противоположная точке C , находится в A . Возьмем на шаре любую точку M ; пусть прямая линия AMS , соединяю-

щая A с M , пересечет линию EF в точке S , в таком случае S будет проекцией M . Затем примем, что радиус шара равен единице, откуда диаметр $AC = 2$; обозначим дугу CM через z , тогда угол $CAM = \frac{1}{2}z$, откуда расстояние

$$CS = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} z = \frac{2 \sin z}{1 + \cos z} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos z}{1 + \cos z}}.$$

§ 4. Если из M опустить на AC перпендикуляр MP , то $MP = \sin z$. Если плоскую фигуру AMC вращать вокруг оси AC , то точка M опишет круг, плоскость которого параллельна касательной плоскости; радиус его равен $MP = \sin z$; этому кругу соответствует на касательной плоскости круг, описанный радиусом $CS = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} z$. Радиус нашего круга на шаре относится, следовательно, к радиусу проекции, как PM к CS или как AP к AS или, наконец, как AM к AS . Затем некоторую дугу круга, описанного на шаре радиусом PM , и соответствующую ей дугу проекции этого круга измеряют равные центральные углы.

§ 5. Рассмотрим на шаре точку m , весьма близкую к точке M ; пусть ее проекция будет s , так что элементу дуги Mm соответствует малый отрезок Ss . Тогда спрашивается, какова взаимосвязь элементов Mm и Ss . Для этого прежде всего заметим, что угол $ASC = 90^\circ - \frac{1}{2}z = \angle ASC$. Затем, мерой угла AMm служит половина дуги AM , т. е. это будет угол $AMm = 90^\circ - \frac{1}{2}z$, а поэтому равный углу AsC . Отсюда следует, что треугольник AMm подобен треугольнику AsS и тогда

$$Mm : Ss = AM : AS, \text{ т. е. } = AP : AC.$$

Отношение получается такое же, какое мы нашли между радиусом PM круга, описанного на шаре, и радиусом CS соответствующего круга на плоскости, но точно так же, как радиусы этих кругов, относятся и те же соответствующие элементы дуг. Отсюда следует, что если мы

§ 8. Опустим из точки S на проекции перпендикуляр SX на неизменную прямую EF , на которой лежит полюс H , и обозначим координаты CX и SX соответственно через x и y . Тогда

$$CS = \frac{2 \sin CM}{1 + \cos CM},$$

откуда

$$x = \frac{2 \sin CM \cos GCM}{1 + \cos CM}, \quad y = \frac{2 \sin CM \sin GCM}{1 + \cos CM};$$

отсюда следует

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} GCM = \frac{\sin v \sin t}{\cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t}.$$

Кроме того, из найденного выше уравнения получается

$$x^2 + y^2 = CS^2 = \frac{4(1 - \cos v \cos g - \sin v \sin g \cos t)}{1 + \cos v \cos g + \sin v \sin g \cos t}.$$

Таким образом, мы получаем два уравнения для вычисления координат x и y .

§ 9. Еще легче непосредственно найти значения этих координат следующим путем. Из уравнения

$$\sin t : \sin CM = \sin GCM : \sin v$$

следует

$$\sin CM \cdot \sin GCM = \sin v \cdot \sin t.$$

Воспользовавшись этим уравнением, получаем (см. последнее уравнение § 7)

$$\operatorname{tg} GCM = \frac{\sin GCM}{\cos GCM} = \frac{\sin CM \sin GCM}{\cos v \sin g - \sin v \sin g \cos t},$$

откуда

$$\sin CM \cos GCM = \cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t,$$

и потому далее

$$x = \frac{2(\cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t)}{1 + \cos CM}, \quad y = \frac{2 \sin v \sin t}{1 + \cos CM}.$$

Подставляя, наконец, вместо CM его значение из § 7, получаем для координат выражения

$$x = \frac{2(\cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t)}{1 + \cos v \cos g + \sin v \sin g \cos t},$$

$$y = \frac{2 \sin v \sin t}{1 + \cos v \cos g + \sin v \sin g \cos t}.$$

§ 10. Подставим в эти формулы $v = 0^\circ$, тогда получим координаты точки, которую на проекции занимает полюс H . Для них получаем значения

$$x = \frac{2 \sin g}{1 + \cos g} = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} g = CH, \quad y = 0.$$

Легко также получить местоположение другого полюса; нужно только положить $v = 180^\circ$, откуда

$$x = \frac{-2 \sin g}{1 - \cos g}, \quad y = 0.$$

Если точка K (рис. 5) представляет этот полюс, то, следовательно,

$$CK = \frac{2 \sin g}{1 - \cos g} = 2 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} g.$$

Примем затем $CE = CF = 2$, тогда EF будет диаметром круга, внутри которого изображено все полушарие, центр которого находится в точке C . Диаметр этого круга равен 4, т. е. в два раза больше диаметра шара.

§ 11. Чтобы получить на нашей проекции экватор, примем $v = 90^\circ$, тогда x и y представят собой координаты на карте некоторой точки экватора, и получим

$$x = \frac{-2 \cos g \cos t}{1 + \sin g \cos t}, \quad y = \frac{2 \sin t}{1 + \sin g \cos t}.$$

Затем приведенная в § 8 формула для $x^2 + y^2$ дает

$$x^2 + y^2 = \frac{4(1 - \sin g \cos t)}{1 + \sin g \cos t},$$

отсюда

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{-\cos g \cos t}{2(1 - \sin g \cos t)},$$

следовательно,

$$\cos t = \frac{2x}{2x \sin g - (x^2 + y^2) \cos g};$$

подставив это значение в уравнение для x , получим

$$4x \sin g - (x^2 + y^2) \cos g = -4 \cos g,$$

Итак, получается

$$x^2 + y^2 = \frac{4(x \sin g + \cos g)}{\cos g}$$

и дальше

$$y^2 + (2 \operatorname{tg} g - x)^2 = \frac{4}{\cos^2 g}.$$

Отсюда видно, что экватор на карте представляет собой круг, описанный радиусом $\frac{2}{\cos g}$. Чтобы найти центр этого круга, проведем (рис. 6) линию $CJ = 2 \operatorname{tg} g$ так, чтобы $JX = 2 \operatorname{tg} g - x$; и так как должно получиться

$$XS^2 + JX^2 = \frac{4}{\cos^2 g},$$

то отсюда следует, что $JS = \frac{2}{\cos g}$, т. е. JS имеет постоянную длину, Эта точка I будет центром круга, соответствующего экватору, причем $CJ = 2 \operatorname{tg} g$. Восставим еще в точке C перпендикуляр $CD = 2$, в таком

случае угол JDC равен g , а потому $ID = \frac{2}{\cos g}$. Следовательно, экватор на карте получим, если опишем около J круг радиусом ID .

§ 12. Определим на нашей карте параллели. Чтобы сделать вычисление более ясным, для сокращения следует ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= 2 \sin g \cos \alpha, & b &= 2 \cos g \sin \alpha, \\ c &= 1 + \cos g \cos \alpha, & d &= \sin g \sin \alpha, \\ e &= 4 - 4 \cos g \cos \alpha. \end{aligned}$$

Здесь вместо применявшейся прежде буквы v написана буква α , так что α обозначает расстояние от полюса рассматриваемой нами параллели. Тогда наши уравнения примут вид

$$x = \frac{a - b \cos t}{c + d \cos t}, \quad x^2 + y^2 = \frac{e - 4d \cos t}{c + d \cos t}.$$

Из первого из них следует

$$\cos t = \frac{a - cx}{b + dx},$$

и после подстановки этого выражения второе примет вид

$$x^2 + y^2 = \frac{d(e + 4c)x + be - 4ad}{bc + ad}.$$

Снова выразив a, b, c, d через g и α , получим

$$x^2 + y^2 = \frac{4(x \sin g + \cos g - \cos \alpha)}{\cos g + \cos \alpha}.$$

Приведя это уравнение к форме

$$y^2 + \left(\frac{2 \sin g}{\cos g + \cos \alpha} - x \right)^2 = \frac{4 \sin^2 \alpha}{(\cos g + \cos \alpha)^2},$$

видим, что проекция рассматриваемой параллели представляет собой

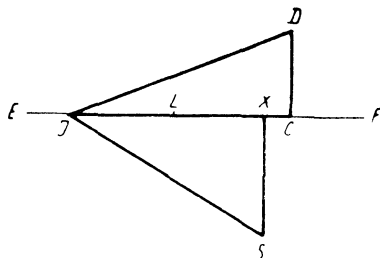


Рис. 6.

круг радиусом $\frac{2 \sin \alpha}{\cos g + \cos \alpha}$, центр которого лежит на оси EF в точке L (рис. 6), и расстояние его от C равно

$$CL = \frac{2 \sin g}{\cos g + \cos \alpha}.$$

§ 13. Нам нужно еще найти проекции всех меридианов. Сперва при $t = 0^\circ$ прямая HK (см. рис. 5) представляет собой начальный меридиан, от которого отсчитывается долгота. Пусть затем $t = \beta$ — отклонение искомого меридиана относительно начального, в таком случае

$$\begin{aligned}x &= \frac{2(\sin g \cos v - \cos \beta \cos g \sin v)}{1 + \cos g \cos v + \cos \beta \sin g \sin v}, \\y &= \frac{2 \sin \beta \sin v}{1 + \cos g \cos v + \cos \beta \sin g \sin v}, \\x^2 + y^2 &= \frac{4(1 - \cos g \cos v - \cos \beta \sin g \sin v)}{1 + \cos g \cos v + \cos \beta \sin g \sin v},\end{aligned}$$

из этих уравнений следует исключить v . В заключение рассмотрим выражение

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \beta \sin v}{\sin g \cos v - \cos \beta \cos g \sin v} = \frac{\sin \beta \operatorname{tg} v}{\sin g - \cos \beta \cos g \operatorname{tg} v},$$

откуда следует

$$\operatorname{tg} v = \frac{y \sin g}{x \sin \beta + y \cos \beta \cos g}.$$

§ 14. Чтобы наиболее удобно воспользоваться этим значением, образуем сперва из приведенных выше уравнений следующее

$$4 - x^2 - y^2 = \frac{8 \cos g \cos v + 8 \cos \beta \sin g \sin v}{1 + \cos g \cos v + \cos \beta \sin g \sin v}$$

и разделим его на y , тогда получится

$$\begin{aligned}\frac{4 - x^2 - y^2}{y} &= \frac{4 \cos g \cos v + 4 \cos \beta \sin g \sin v}{\sin \beta \sin v} = \\&= \frac{4 \cos g + 4 \cos \beta \sin g \operatorname{tg} v}{\sin \beta \operatorname{tg} v}.\end{aligned}$$

Подставим вместо $\operatorname{tg} v$ найденное выше значение (последнее в § 13), тогда получим

$$\frac{4 - x^2 - y^2}{y} = \frac{4y \cos \beta + 4x \sin \beta \cos g}{y \sin \beta \sin g},$$

откуда следует

$$x^2 + y^2 = 4 - \frac{4y \cos \beta + 4x \sin \beta \cos g}{\sin \beta \sin g}.$$

Это выражение точно так же представляет собой уравнение круга. Поэтому можно прийти к такому заключению: все большие круги, которые можно провести на шаре, на карте изобразятся дугами окружностей или прямыми линиями.¹²

§ 15. Чтобы получить с одной стороны центр, а с другой стороны радиус каждого меридиана на нашей карте, преобразуем только что найденное уравнение

$$\left(\frac{2 \cos g}{\sin g} + x\right)^2 + \left(\frac{2 \cos \beta}{\sin \beta \sin g} + y\right)^2 = \frac{4}{\sin^2 \beta \sin^2 g}.$$

Если при этом (рис. 7) точки H и K остаются полюсами на карте, так что (согласно § 10)

$$CH = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} g = \frac{2 \sin g}{1 + \cos g},$$

$$CK = 2 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} g = \frac{2 \sin g}{1 - \cos g},$$

причем весь отрезок

$$HK = \frac{4}{\sin g}, \quad \frac{1}{2} HK = \frac{2}{\sin g},$$

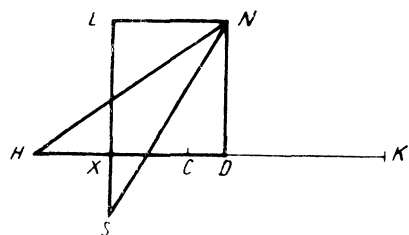


Рис. 7.

то, если O — середина HK , имеем

$$CO = \frac{2 \cos g}{\sin g};$$

далее, так как $CX = x$, то

$$OX = \frac{2 \cos g}{\sin g} + x.$$

Восставим в точке O перпендикуляр к оси HK

$$ON = \frac{2 \cos \beta}{\sin \beta \sin g}$$

и отложим $XL = ON$, тогда получим

$$SL = \frac{2 \cos \beta}{\sin \beta \sin g} + y,$$

откуда

$$OX^2 + SL^2 = LN^2 + SL^2 = NS^2 = \frac{4}{\sin^2 \beta \sin^2 g},$$

т. е.

$$NS = \frac{2}{\sin \beta \sin g}.$$

Отсюда видно, что точка N представляет собой центр меридиана, который надлежит описать вокруг нее, а его радиус равен $\frac{2}{\sin \beta \sin g}$ и длина его точно равна NH . Согласно природе вещей это и должно было быть, так как все меридианы на карте, конечно, должны проходить через оба полюса.

Вывод этой проекции из общих формул

§ 16. Спрашивается, какую форму нужно придать функции Δ , чтобы получить только что рассмотренную проекцию. Прежде всего мы видим, что степени аргумента выше первой не могут входить в нее, потому что в противном случае появились бы многократно увеличенные углы t и v . Затем функция, о которой идет речь, должна быть дробной, так как выражения для x и y (§ 9) были дробные. Поэтому можем принять общую формулу для $\Delta(z)$

$$\Delta(z) = \frac{a + bz}{c + dz}.$$

При этом для z выберем последнюю из приведенных выше (§ 2) формул

$$z = (\cos t \pm \sqrt{-1} \sin t) \operatorname{tg} \frac{1}{2} v.$$

Рассмотрим поэтому функцию

$$\frac{a + b(\cos t \pm \sqrt{-1} \sin t) \operatorname{tg} \frac{1}{2} v}{c + d(\cos t \pm \sqrt{-1} \sin t) \operatorname{tg} \frac{1}{2} v}$$

и заменим в ней $\operatorname{tg} \frac{1}{2} v$ выражением $\frac{\sin v}{1 + \cos v}$, тогда она примет вид

$$\frac{a(1 + \cos v) + b(\cos t \pm \sqrt{-1} \sin t) \sin v}{c(1 + \cos v) + d(\cos t \pm \sqrt{-1} \sin t) \sin v}.$$

§ 17. Чтобы сделать вычисления более наглядными, напомним предыдущую дробь в более простом виде

$$\frac{P \pm Q \sqrt{-1}}{R \pm S \sqrt{-1}},$$

где

$$\begin{aligned} P &= a(1 + \cos v) + b \sin v \cos t, & Q &= b \sin v \sin t, \\ R &= c(1 + \cos v) + d \sin v \cos t, & S &= d \sin v \sin t. \end{aligned}$$

Тогда для координат x и y имеем выражения

$$\begin{aligned} x &= \frac{P + Q \sqrt{-1}}{R + S \sqrt{-1}} + \frac{P - Q \sqrt{-1}}{R - S \sqrt{-1}}, \\ y \sqrt{-1} &= \frac{P + Q \sqrt{-1}}{R + S \sqrt{-1}} - \frac{P - Q \sqrt{-1}}{R - S \sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Из этих выражений получается

$$x = \frac{2PR + 2QS}{R^2 + S^2}, \quad y = \frac{2QR - 2PS}{R^2 + S^2}.$$

§ 18. Если теперь подставим вместо P, Q, R, S опять их значения, то получим для общего знаменателя

$$\begin{aligned} R^2 + S^2 &= c^2(1 + \cos v)^2 + 2cd(1 + \cos v) \sin v \cos t + d^2 \sin^2 v = \\ &= (1 + \cos v)[c^2(1 + \cos v) + 2cd \sin v \cos t + d^2(1 - \cos v)]. \end{aligned}$$

Затем числителями у x и y будут

$$\begin{aligned} PR + QS &= (1 + \cos v)[ac(1 + \cos v) + (bc + ad) \sin v \cos t + bd(1 - \cos v)], \\ QR - PS &= (1 + \cos v)(bc - ad) \sin v \sin t. \end{aligned}$$

Отсюда получаем для координат выражения

$$x = \frac{2ac(1 + \cos v) + 2(bc + ad) \sin v \cos t + 2bd(1 - \cos v)}{c^2(1 + \cos v) + 2cd \sin v \cos t + d^2(1 - \cos v)},$$

$$y = \frac{2(bc - ad) \sin v \sin t}{c^2(1 + \cos v) + 2cd \sin v \cos t + d^2(1 - \cos v)}.$$

§ 19. Сравним эти формулы с теми, которые мы нашли выше, а именно

$$x = \frac{2(\cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t)}{1 + \cos v \cos g + \sin v \sin g \cos t},$$

$$y = \frac{2 \sin v \sin t}{1 + \cos v \cos g + \sin v \sin g \cos t},$$

тогда увидим, что последние по форме совпадают с первыми, и можно легко получить значения, которые следует приписать постоянным a , b , c , d , чтобы добиться полного их совпадения. Чтобы сперва сделать тождественными знаменатели, нужно принять

$$c^2 + d^2 = 1, \quad c^2 - d^2 = \cos g, \quad 2cd = \sin g.$$

Из двух первых этих уравнений получается

$$c^2 = \frac{1 + \cos g}{2} = \cos^2 \frac{1}{2} g, \quad d^2 = \frac{1 - \cos g}{2} = \sin^2 \frac{1}{2} g,$$

т. е.

$$c = \cos \frac{1}{2} g, \quad d = \sin \frac{1}{2} g,$$

а третье уравнение будет удовлетворяться само собой

$$2cd = 2 \sin \frac{1}{2} g \cos \frac{1}{2} g = \sin g.$$

Чтобы тождественными стали числители двух выражений для x , требуется, чтобы

$$ac + bd = 0, \quad ac - bd = \sin g, \quad bc + ad = -\cos g$$

или, подставив найденные выше значения для c и d ,

$$a \cos \frac{1}{2} g + b \sin \frac{1}{2} g = 0, \quad a \cos \frac{1}{2} g - b \sin \frac{1}{2} g = \sin g,$$

$$b \cos \frac{1}{2} g + a \sin \frac{1}{2} g = -\cos g.$$

Два первых уравнения дают

$$a = \frac{\sin g}{2 \cos \frac{1}{2} g} = \sin \frac{1}{2} g, \quad b = \frac{-\sin g}{2 \sin \frac{1}{2} g} = -\cos \frac{1}{2} g.$$

Эти значения сами собой удовлетворяют третьему уравнению. Остается только исследовать, могут ли найденные нами значения также

оказаться пригодными для числителей обоих выражений y . Для этого требуется, чтобы

$$bc - ad = 1.$$

Но наши значения дают

$$bc = -\cos^2 \frac{1}{2}g, \quad ad = \sin^2 \frac{1}{2}g,$$

тогда получим

$$bc - ad = -1.$$

Следует еще заметить, что можно менять положительное и отрицательное направление у каждой оси координат, тогда получится полное совпадение формул.

§ 20. Из предыдущих исследований видно, что наши общие формулы приводят к стереографической проекции, о которой мы уже говорили, если для функции $\Delta(z)$ опять примем форму

$$\Delta(z) = \frac{\sin \frac{1}{2}g - z \cos \frac{1}{2}g}{\cos \frac{1}{2}g + z \sin \frac{1}{2}g} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}g - z}{1 + z \operatorname{tg} \frac{1}{2}g}.$$

Впрочем, можно заметить, что этот вид проекции очень удобен для практического применения, как это требуется для географии, так как она не сильно искажает истинную форму отдельных частей Земли. Но в первую очередь следует заметить, что в этой проекции не только все меридианы и параллели изображаются кругами или даже прямыми линиями, но и все проведенные на шаре большие круги передаются дугами окружности или прямыми линиями, между тем как при других предположениях, которые можно сделать относительно функции Δ , такого преимущества как раз не получается.¹³

III

De projectione geographica De Lisliana in mappa generali imperii russici usita

Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae
pro anno MDCCLXXVII

(T. I, p. 143—153)

III

О географической проекции Делиля, примененной на генеральной карте Российской Империи

Труды Петербургской академии наук за 1777 г.

(Том 1, стр. 143 — 153)

§ 1. С давних пор обсуждался вопрос, какого рода проекцией надо пользоваться для составления общей карты Российской империи; сперва таковой представлялась стереографическая проекция, с помощью которой с любого места можно изобразить оба полушария Земли, т. е. верхнее и нижнее.* При таком способе изображения не только все параллели пересекаются с меридианами под прямыми углами, но и самые малые части на карте подобны соответствующим частям на поверхности шара. В действительности такого рода проекцию для общей карты этой империи применил прекрасный географ, профессор в Виттенберге Газиус (Hasius).

§ 2. Но в этой картографической проекции скоро обнаружилось два важных недостатка, которые, по-видимому, делали ее непригодной для практического употребления. Первый недостаток заключается в том, что на среднем меридиане градусы широты оказываются неодинаковыми; вблизи от экватора они равны половине их величины у полюсов.¹⁴ От этого получается у нашей карты большой недостаток, заключающийся в том, что на краю карты масштаб крупнее, чем на ее середине, так что лицу, рассматривающему на карте, например, провинцию Камчатку, она покажется почти в четыре раза больше, чем провинция такой же величины, расположенная у середины карты. Напротив того, при построении такой карты в первую очередь требуется, чтобы области одинаковой величины и на карте имели равные площади, безразлично, в какой бы части карты они ни находились.

§ 3. Второй недостаток заключается в следующем: в этой проекции меридианы от середины карты к ее краям становятся все более искривленными, так что крайние меридианы изображаются даже полуокружностями. Так, например, в провинции Камчатке все меридианы показаны довольно сильно искривленными дугами круга. Если бы кто-либо пожелал вырезать эту часть из общей карты или скопировать ее, чтобы получить таким образом специальную карту данной провинции, то эта последняя карта была бы мало пригодной и не соответствовала бы правилам, которым обычно следуют при построении географических карт. Но как раз самой существенной целью карты является то, что все специальные карты могут получаться простым копированием с нее, без дальнейших редуцирований, и такие копии будут иметь годную для практики форму.

§ 4. После того как, на основании приведенных соображений, проекция, о которой мы говорили, была отброшена, стали испытывать проекции, на которых обыкновенно изображаются северное и южное

*Эйлер употребляет выражения «верхнее и нижнее полушария» в том смысле, что при проектировании на плоскость, проходящую через средину шара, всегда одно полушарие будет «верхним», другое «нижним». (Прим. ред.).

полушария. Но хотя в этом случае все меридианы передаются прямыми линиями, сходящимися в полюсах, чем устраняется один из указанных выше недостатков, все же пришлось отбросить и эту проекцию, потому что градусы широты оказываются неодинаковыми на всех меридианах: величина их у полюсов равна половине величины на экваторе, между тем как требовалось, чтобы масштаб повсюду на карте оставался одинаковым, и по карте можно было бы правильно оценивать взглядом величину отдельных провинций.

§ 5. Нужно было изобрести другой вид проекции, при котором, во-первых, все меридианы изображались бы прямыми линиями и все градусы широты на них имели бы одинаковую величину и, во-вторых, все меридианы пересекали бы параллели под прямыми углами. Но так как такого рода проекцию наверное нельзя было получить, чтобы градусы на параллелях повсюду сохраняли правильное соотношение с градусами по меридианам, которое они имеют на шаре, то пришли к соглашению, что лучше не вполне точно выполнить последнее условие, чем отказаться от упомянутых выше преимуществ. Тогда возник чрезвычайно важный вопрос: как нужно проводить на карте меридианы и параллели, чтобы на всей карте возможно меньше отступать от истинного значения соотношения градусов долготы и широты. И чтобы такое отклонение, которое можно считать платой за сохранение упомянутого выше преимущества, было так мало, чтобы ошибки едва были заметны.

§ 6. Это требование выполнил Делиль, знаменитый астроном и географ тех времен, которому впервые было поручено составление такой общей карты; он сделал точно равными истинные соотношения между градусами долготы и широты на двух особо замечательных для данного случая параллелях. Он был того мнения, что если названные параллели отстоят на равном расстоянии от средней параллели всей карты, как и от ее краев, то отклонение нигде не может быть значительным. Тогда спрашивается, как же целесообразнее всего выбрать эти две параллели, чтобы наибольшие отклонения, которые могут все же обнаружиться, были возможно малыми?

§ 7. Пусть AB (рис. 8) — часть какого-то меридиана, проходящего через Российскую империю, и пусть A — самая южная и B — самая северная точка на нем. Широта точки A равна a , точки B равна b ; при этом a приблизительно равно 40° и b равно 70° . Затем, обозначим через δ длину одного градуса, одинакового на всех меридианах, и пусть P и Q — точки, в которых градусы долготы и широты находятся в правильных взаимоотношениях; p — широта точки P , q — широта точки Q . Так как градус какой-либо параллели на шаре относится к градусу меридиана, как косинус широты к единице, то в точке P градус долготы равен величине $Pp = \delta \cos p$, а в точке Q равен величине $Qq = \delta \cos q$, и малые отрезки Pp и Qq , хотя в действительности они дуги окружностей, можно рассматривать как прямые линии, перпендикулярные к меридиану AB ¹⁵.

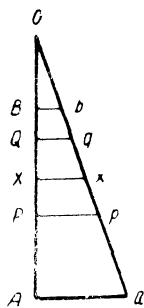


Рис. 8

§ 8. Через точки p и q проводят прямую pqO , пересекающую в точке O главный меридиан AB . Эта прямая pqO изображает ближайший меридиан, отстоящий от главного меридиана на один градус долготы; подобным же образом легко можно провести от точки O и остальные меридианы. Для определения точки пересечения O имеем пропорцию

$$(Pp - Qq) : PQ = Pp : PO,$$

т. е.

$$\delta (\cos p - \cos q) : (q - p) = \delta \cos p : PO,$$

откуда

$$PO = \frac{(q - p) \cos p}{\cos p - \cos q}.$$

Если примем, что $p = 50^\circ$, $q = 60^\circ$, тогда найдем расстояние $PO = 45^\circ 1'$. Так как точка P отстоит от экватора на 50° , то расстояние точки O от экватора равно $95^\circ 1'$, поэтому точка O лежит за полюсом Земли, на расстоянии $5^\circ 1'$ от последнего.

§ 9. Так как при этом пункт O , в котором пересекаются все меридианы на карте, отличается от истинного земного полюса, из которого на шаре исходят все меридианы, то для местностей, лежащих очень близко к полюсу, получается весьма большое искажение. Поэтому на общей карте Российской империи обыкновенно не изображают местности, расположенные за 70° широты. Все-таки только для этой широты ошибка еще не очень велика, и такое отклонение легко можно было бы потерпеть.

Если найдена точка O , то из нее радиусом OP описывают круг; на его окружности откладывают равные отрезки длиной $\delta \cos p$, т. е. отрезки, равные действительной длине одного градуса этой параллели, и тогда проводят прямые линии из O через отдельные точки деления; они изображают меридианы карты. Затем получают параллели карты, описывая окружности вокруг O , радиусами, отличающимися один от другого на один градус по меридиану, которые проводятся так, что для обеих широт p и q получается правильное соотношение градусов долготы и широты. Таким образом, можно легко построить градусную сеть всей карты, и на основании ее без труда будут нанесены отдельные пункты и провинции.

§ 10. Посмотрим, насколько это изображение отклоняется от действительности в крайних точках карты A и B . Пусть Aa — один градус параллели, проходящей через точку A , Bb — один градус параллели, проходящей через точку B . Эти отрезки линий должны на самом деле иметь длину $\delta \cos a$ и $\delta \cos b$. Чтобы найти величину, которую они действительно имеют на карте, определим сперва угол POp , соответствующий одному градусу долготы. Последний равен

$$\frac{Pp}{PO} = \frac{\delta (\cos p - \cos q)}{q - p} = \frac{\cos p - \cos q}{q - p},$$

так как $\delta = 1^\circ$. Обозначим этот угол для краткости через ω , следовательно, имеем

$$\omega = \frac{\delta (\cos p - \cos q)}{q - p}.$$

Примем, как и выше, $p = 50^\circ$, $q = 60^\circ$, тогда наш угол $POp = \omega = 49' 6''$. При вычислении его следует заметить, что разность $q - p$ должна быть дана не в градусах, а выражена в частях радиуса, и при этом отметим, что один градус равен 0,017 453 29. На основании предыдущего получается, что углы ω , образующие при O отдельные градусы долготы, несколько меньше одного градуса.¹⁶

§ 11. Чтобы сделать этот вопрос более общим, обозначим через ω , угол, соответствующий одному градусу, следовательно,

$$\omega = \frac{\delta (\cos p - \cos q)}{q - p};$$

так как здесь p и q выражены в градусах, то разность $q - p$ нужно умножить на 0,017 453 29; это число для краткости обозначим через α , так что получим

$$\omega = \frac{\delta (\cos p - \cos q)}{\alpha (q - p)};$$

при этом можно положить $\delta = 1^\circ$, если желательно иметь ω в градусах. Кроме того принимаем, что расстояние точки O от полюса, дальше которого она находится, равно z градусов. Так как расстояние точки P от полюса равно $(90^\circ - p)$, то расстояние ее от O равно $90^\circ - p + z$, следовательно, в частях радиуса равно $\alpha (90^\circ - p + z)$. Для того же отрезка прежде было найдено

$$PO = \frac{(q - p) \cos p}{\cos p - \cos q};$$

эта длина PO выражена в градусах. Длина PO должна равняться углу $90^\circ - p + z$, откуда получается

$$z = \frac{(q - p) \cos p}{\cos p - \cos q} - 90^\circ + p.$$

§ 12. Так как расстояние точки A от полюса равно $90^\circ - a$, откуда отрезок $AO = 90^\circ - a + z$, и в частях радиуса равен $\alpha (90^\circ - a + z)$, то этот отрезок, умноженный на ω , дает длину градуса Aa ; длина его поэтому равна

$$\frac{\delta (\cos p - \cos q) (90^\circ - a + z)}{q - p};$$

между тем как ее действительная величина должна равняться $\delta \cos a$. Разность между этими двумя значениями дает ошибку карты в конечном пункте A . Точно так же в другом конце B один градус параллели на карте равен

$$\frac{\delta (90^\circ - b + z) (\cos p - \cos q)}{q - p},$$

в то время как в действительности длина этого градуса равна $\delta \cos b$. Разность между обоими значениями дает ошибку карты в конце ее B .

§ 13. Было бы целесообразнее сначала определить положение двух промежуточных точек P и Q так, чтобы ошибки в обоих концах A и B были равны одна другой. Это получится из уравнения

$$\frac{(90^\circ - a + z) (\cos p - \cos q)}{q - p} - \cos a = \frac{(90^\circ - b + z) (\cos p - \cos q)}{q - p} - \cos b,$$

это уравнение можно привести к виду

$$(a - b) (\cos p - \cos q) + (q - p) (\cos a - \cos b) = 0.$$

§ 14. Для облегчения нашего исследования введем в вычисления вместо p и q измеренный в градусах отрезок z , на величину которого точка O лежит дальше полюса, а также угол ω , соответствующий отдельным градусам долготы в точке O , или соответствующий углу между изображениями на карте двух соседних меридианов, на Земле отстоящих один от другого на один градус; примем также, что этот угол ω выражен в градусах или в делениях градуса. Тогда можем принять $\delta = 1^\circ$ и длина градуса параллели будет равна в точке A величине

$\alpha (90^\circ - a + z) \omega$, в точке же B равна $\alpha (90^\circ - b + z) \omega$. Так как действительная длина этого градуса соответственно равна $\cos a$ и $\cos b$, то согласно условию, что ошибки в A и B равны, получается уравнение

$$\alpha (90^\circ - a + z) \omega - \cos a = \alpha (90^\circ - b + z) \omega - \cos b,$$

которое можно привести к виду

$$\alpha (a - b) \omega = \cos b - \cos a$$

или

$$\omega = \frac{\cos a - \cos b}{\alpha (b - a)};$$

это значение выражено в делениях градуса.

§ 15. После того как мы сделали взаимно равными ошибки проекции в ее крайних точках A и B , устроим так, чтобы эти ошибки не превышали самых больших ошибок, которые могут получаться на протяжении отрезка AB . Самая большая ошибка получается в точке X посередине AB ,¹⁷ широта которой равна $\frac{a+b}{2}$, откуда величина ошибки получается

$$\alpha \left(90^\circ - \frac{a+b}{2} + z \right) \omega - \cos \frac{a+b}{2}.$$

Но это выражение имеет знак, противоположный знаку выражения в A и B , поэтому нужно переменить у него знак, т. е.

$$\cos \frac{a+b}{2} - \alpha \left(90^\circ - \frac{a+b}{2} + z \right) \omega.$$

Если сделать это выражение равным обеим ошибкам в A и B , то получатся уравнения

$$\alpha (90^\circ - a + z) \omega - \cos a = \cos \frac{a+b}{2} - \alpha \left(90^\circ - \frac{a+b}{2} + z \right) \omega$$

и

$$\alpha (90^\circ - b + z) \omega - \cos b = \cos \frac{a+b}{2} - \alpha \left(90^\circ - \frac{a+b}{2} + z \right) \omega.$$

§ 16. Равенство ошибок в A и B уже дало нам уравнение

$$\omega = \frac{\cos a - \cos b}{\alpha (b - a)}.$$

Подставим это значение в первое из двух написанных выше уравнений, тогда получим

$$\frac{\left(180^\circ - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b + 2z \right) (\cos a - \cos b)}{b - a} = \cos a + \cos \frac{a+b}{2},$$

которое можно привести к виду

$$180^\circ - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b + 2z = \frac{b - a}{\cos a - \cos b} \left(\cos a + \cos \frac{a+b}{2} \right);$$

отсюда непосредственно следует, что расстояние равно $2z$.

§ 17. Применим этот результат к карте Российской империи. Так как здесь $a = 40^\circ$, $b = 70^\circ$, следовательно $\frac{a+b}{2} = 55^\circ$, в таком случае имеем прежде всего для угла ω уравнение

$$\omega = \frac{\cos 40^\circ - \cos 70^\circ}{30\alpha} = \frac{0,424\ 0243}{0,523\ 5987},$$

откуда находим $\omega = 48'44''$. Затем предпоследнее уравнение § 15 дает

$$\alpha(85^\circ + 2z)\omega = \cos 40^\circ + \cos 55^\circ = 1,339\ 62$$

и тогда

$$\alpha\omega = \frac{0,424\ 02}{30} = 0,0141,$$

таким образом, получаем

$$85^\circ + 2z = \frac{1,339\ 62}{0,0141} = 95^\circ, \text{ т. е. } z = 5^\circ.$$

§ 18. Выше мы приняли, что самая большая ошибка падает на середину отрезка AB . Так как этого обычно с точностью не бывает, то все же определим точку X , в которой ошибка будет наибольшей. Обозначим через x широту точки X , в таком случае ошибка в ней равна

$$\alpha(90^\circ - x + z)\omega - \cos x;$$

дифференциал этого выражения должен равняться нулю. При получении этого дифференциала не следует принимать $d \cos x = -\sin x \, dx$, так как x выражено здесь в градусах; лучше здесь $d \cos x$, равное $-\sin x$, умножить на дифференциал дуги, выраженной в градусах, в свою очередь равный αx . Сообразно с этим мы должны здесь принять¹⁸

$$d \cos x = -\sin x \cdot \alpha dx;$$

условие, что дифференциал написанного выше выражения равен нулю, дает при этом

$$-\alpha\omega \, dx + \alpha dx \cdot \sin x = 0$$

или

$$\sin x = \omega,$$

причем ω представляет собой найденную выше дробь $\omega = \frac{\cos a - \cos b}{\alpha(b - a)}$,

которая в нашем случае равна $\frac{0,424\ 0243}{0,523\ 5987}$. Эта дробь равна $\sin x$, откуда $x = 54^\circ 4'$. Точка X не попадает точно на середину AB .

§ 19. Получив значение x , найдем выражение для ошибки в этой точке

$$\alpha(90^\circ - x + z)\omega - \cos x;$$

его отрицательное значение должно быть равно ошибке в A и в B . Тогда получится уравнение

$$\alpha(180^\circ - a - x + 2z)\omega = \cos a + \cos x;$$

отсюда вычисляют значение z . Так как $z = 54^\circ \frac{1}{15}$, то

$$85^\circ \frac{14}{15} + 2z = \frac{\cos a + \cos x}{\alpha \omega} = 95^\circ 56',$$

откуда

$$2z = 10^\circ, z = 5^\circ,$$

между тем как $\omega = 0,809\,8270$ градуса, т. е.¹⁹

$$\omega = 48'44''.$$

§ 20. Посмотрим еще, как велика будет максимальная ошибка в точках A, B, X . Для этой цели вычислим ошибку в точке A ; она равна

$$\alpha \omega (90^\circ - a + z) - \cos a = 55 \alpha \omega - 0,766\,0444 = 0,009\,46,$$

так как $\alpha \omega = 0,014\,10^{20}$, т. е. в то время как градус на параллели A имеет длину, равную 0,766 04, на карте он будет несколько большим, т. е. равен 0,775 50. Приведенное выше число представляет ошибку, выраженную в долях градуса меридиана, и так как на такой градус приходится 15 миль, то ошибка составляет 0,141 90 мили (1052,7 м), т. е. приблизительно одну седьмую мили или одну русскую версту. На конце B , т. е. на широте 70° , где градус параллели имеет длину 0,342 02, эта ошибка равна только 38-й части всей длины; такая ошибка допустима для этой местности.

§ 21. Для построения карты Российской империи поэтому наиболее целесообразно сперва установить положение точки O , расположенной на меридиане BA по ту сторону от полюса, на расстоянии от него в 5 градусов. На линии AB откладывают на равных расстояниях отдельные градусы широты и через эти точки делений описывают круги, центром которых служит точка O ; эти круги представляют собой параллели на карте, в то время как меридианами будут прямые линии, проходящие через точку O , образующие между собой в точке O углы, равные $48'45''$. Так как AO равно 55° , то поэтому на параллели, проходящей через конечную точку A , градус долготы будет иметь величину $55 \alpha \omega = 0,775\,50$, т. е. такой градус относится к градусу меридиана, как $0,775\,50 : 1$. Такое деление легко выполнить.²⁰

§ 22. Так как на нашей карте все меридианы изображаются прямыми линиями, то и другие большие круги, которые можно вообразить проведенными на шаре, мало будут отклоняться от прямых линий²¹. Экватор был бы изображен кругом с центром в O и радиусом, равным 95° ; отдельные градусы экватора имели бы поэтому длину $95 \alpha \omega = 1,339\,50$, вместо того чтобы быть равными градусам меридиана. Но так как экватор не лежит на нашей карте, то указанная только что ошибка не имеет значения. Посмотрим, насколько большие круги, вычерченные нами на карте, отклоняются от прямых линий.

§ 23. Для облегчения производимого нами исследования вообразим, что средний меридиан AB (рис. 9) продолжен с одной стороны до точки O , а с другой стороны — до экватора и встречается с последним в точке E , так что $AE = 40^\circ$, $AB = 30^\circ$ и $BO = 25^\circ$. Полюс²² лежит в точке Π , где $O\Pi = 5^\circ$. Круг, описанный вокруг O радиусом OE , изобра-

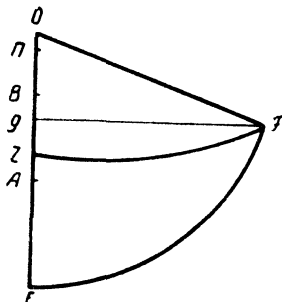


Рис. 9.

жают экватор, расположенный вне нашей карты. Возьмем на нем дугу EF , соответствующую разности долгот 90° ; поэтому центральный угол ее равен $\angle EOF = 90^\circ \cdot \omega = 72^\circ 53'$, между тем как отрезок OF все же равен 95° . Эта точка F служит общей точкой пересечения всех больших кругов, которые можно провести перпендикулярно к нашему меридиану AB .

§ 24. Построим большой круг, перпендикулярный к меридиану AB и проходящий через произвольно взятую точку Z , расположенную между A и B . Этот круг перпендикулярен к AB и проходит через точку F . Истинный вид кривой, соответствующий указанному кругу, будет зависеть от некоторого трансцендентного уравнения, но эта кривая все же не будет отличаться слишком заметно от дуги круга, проходящего через точки Z и F перпендикулярно к прямой AB в точке Z . Чтобы получить кривизну этой дуги круга ZF , проводят из точки F перпендикуляр к OE , так что

$$OG = 95^\circ \cdot \cos 72^\circ 53' = 27,960\ 24,$$

$$FG = 95^\circ \cdot \sin 72^\circ 53' = 90,792\ 21.$$

Отсюда видно, что прямая FG изображает квадрант (четверть окружности) большого круга, перпендикулярного AB , а так как она почти равна 90 градусам меридиана, то на протяжении ее карта едва ли имеет искажение.²³ Если же провести через конечную точку A большой круг, перпендикулярный к AB , то дуга его AF будет на порядочную величину больше прямой FG . Но все же ошибка не будет слишком велика, потому что радиус такого круга составлял бы $165^\circ,9477$, следовательно так велик, что кривизна его едва ли была заметна на карте. Тем меньше это было бы ощутимо для других больших кругов, о которых шла речь, если бы такой случай имел место; все они только немного отличаются от прямых линий.

§ 25. То, что здесь было сказано о больших кругах, перпендикулярных к среднему меридиану AB , в равной мере справедливо и для всех больших кругов, перпендикулярных к другим меридианам. Поэтому карта, составленная таким образом, имеет замечательную выгоду, так как прямые линии, проведенные из одной точки в другую, почти точно соответствуют большим кругам на поверхности шара, а потому расстояния между пунктами на карте, расположенными где бы то ни было, могут быть измерены циркулем без более или менее значительных ошибок. Вследствие таких важных свойств описанная проекция заслуживает предпочтения перед другими для общей карты Российской империи, хотя, строго говоря, искажения на этой карте довольно значительные.

Примечания

К статье I

1) К § 15 и 17. Эйлеров способ выражаться, что dx должно соответствовать одному градусу долготы и т. д. [Эйлер, например, говорит: «referat gradum» — (относится к градусу), в другом месте: «denotet gradum» — (обозначает градус)] не допустим по современным понятиям. Скорее здесь дифференциалы должны быть заменены конечными приращениями переменных, причем добавлено, что для последних дифференциальные формулы пригодны приближенно.

2) К § 27. Эйлер привел в § 27 задачу, поставленную в § 26, об определении функции r , но затем прервал это определение и стал искать другие способы решения. Избранный в § 27 путь также привел к цели. Условие для этого, заключающееся в том, что правая часть последнего уравнения представляет собой полный (точный) дифференциал, позволяет, если как и в § 44, вместо u подставить переменную

$$s = \int \frac{du}{\cos u} = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} u \right)$$

и выразить его условие в виде

$$\frac{d^2(r \cos u)}{dt^2} + \frac{d^2(r \cos u)}{ds^2} = 0. \quad (a)$$

Общее решение уравнения (a) можно написать так:

$$r \cos u = f(s + t\sqrt{-1}) + f_1(s - t\sqrt{-1}),$$

где через f обозначена некоторая произвольная функция, а через f_1 — сопряженная (conjugirte) функция. На основании r получается p из последнего уравнения, а затем x и y . Чтобы получить выражения для x и y , которые затем выводятся в § 44, нужно только принять $f = -f_1 = \Gamma'\sqrt{-1}$, где Γ' обозначает производную приводимой в § 44 функции Γ . Частные решения, рассмотренные в § 29—41, также могут быть получены непосредственно из уравнения (a).

3) К § 44. Эйлер здесь молча заранее предполагает, что функция Γ с действительным аргументом сама действительная. Если обозначить через Γ функцию в более общем смысле, которая может быть также и комплексной, то тогда, если

$$x + y\sqrt{-1} = 2\Gamma(\ln s - t\sqrt{-1})$$

и если x и y должны оставаться действительными, надо принять

$$x - y\sqrt{-1} = 2\Gamma_1(\ln s + t\sqrt{-1}),$$

где Γ_1 будет функцией, сопряженной с Γ , т. е. ее получают из Γ , изменив знаки перед $\sqrt{-1}$.

4) К § 51. Проекция, о которой идет речь, называется обыкновенно стереографической полярной проекцией. У y опять, как и выше, знак изменен на противоположный; затем откинuty множители, приведенные в формулах § 48.

5) К § 54. Решения в рассматриваемой здесь задаче, если еще принять $k^2 = z$, приводят к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{d^2 \left(\frac{1}{z} \right)}{dv^2} = 0.$$

Общее решение этого уравнения нельзя представить в конечной форме.

6) К § 59. По поводу сказанного здесь надо заметить следующее. При интегрировании уравнения $dt = -\alpha dT$ отброшена произвольная постоянная; это можно было сделать, потому что любой меридиан можно выбрать за начальный. Затем постоянные c и x определяются из следующих условий.

Пусть точка, в которой сходятся меридианы на карте, будет изображением полюса, в таком случае, если ограничиться одним северным полушарием, для $u = 90^\circ$, т. е. $v = 1$, будет $x = 0$ и $y = 0$, откуда $c = -1$ и α должно быть отрицательным. Если же меридианы на карте должны, как и на шаре, образовать одинаковые углы, то тогда должно иметь место равенство $\alpha = -1$. Формулы § 59 будут тогда

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2(1 - \sin u)} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2} \right),$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} t.$$

Элемент дуги меридиана на карте будет иметь абсолютное значение

$$d\sigma_1 = -d\sqrt{x^2 + y^2} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2} \right) du,$$

а элемент дуги параллели

$$d\sigma_2 = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2} \right) dt,$$

в то время как соответствующие элементы дуг на шаре будут

$$ds_1 = du, \quad ds_2 = \cos u \, dt = \sin \left(\frac{\pi}{2} - u \right) dt.$$

Поэтому

$$\frac{d\sigma_1}{ds_1} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2} \right), \quad \frac{d\sigma_2}{ds_2} = \frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2} \right)}.$$

Отсюда можно узнать величину искажения, которое всегда имеется, за исключением полюса. Форма, которую имеет какая-либо местность на карте, только незначительно отклоняется от действительности тогда, когда местность расположена вблизи полюса.

К статье II

7) К § 2. Применяемые здесь формулы выведены в § 44 и 47; в них принято $90^\circ - u = v$, и произвольная функция обозначена через Δ вместо Γ . Пониманию вопроса не мешает, что в трех выражениях для x и y обозначается через Δ не одна и та же функция заключенного в скобки аргумента, но этим символом пользуются вообще для обозначения некоторой произвольной функции. Быть может было бы целесообразнее пользоваться в каждом выражении различными обозначениями для функций.

8) К § 3. Обыкновенно, при так называемой стереографической проекции, берут в качестве картинной плоскости не касательную плоскость в точке, противоположной точке зрения (глазу), а плоскость, проходящую через центр шара, параллельную такой плоскости. Изображение на этой касательной плоскости получается в масштабе в два раза крупнее, чем на плоскости, проходящей через центр шара.

Название «стереографическая проекция» введено бельгийским математиком Aguillon и Aguilonius (1566—1617) и принято всеми, хотя оно мало целесообразно. Рассмотренный здесь вид проекции обыкновенно называют стереографической горизонтальной проекцией (проекция на плоскость горизонта точки C).

9) К § 5. В начале § 5 нужно было бы прибавить, что m лежит на круге AM . Доказательство Эйлера не точно, поскольку в нем приняты равными углы ASC и AsC , которые на самом деле отличаются один от другого на бесконечно малый угол. Более строгий вывод имеет такой вид.

Допустим, во-первых, что дуга Mm имеет конечную величину; в таком случае проведем хорду Mm . Тогда угол

$$AsC = ASC - MAm,$$

во-вторых, угол AMm равен разности вписанного угла AMm и дуг AM и Mm , т. е.

$$AMm = 90^\circ - \frac{1}{2}z - MAm,$$

и, так как $ASC = 90^\circ - \frac{1}{2}z$, то $MAm = AsC$. Отсюда получается пропорция $Mm : Ss = AM : As$; в случае, если Mm — бесконечно малая величина, можно взять дугу вместо хорды и тогда принять AS вместо As .

10) К § 5. Для объяснения этого служит следующее замечание. Пусть Mn — элемент дуги круга, описанного радиусом MP и проходящего через точку M , а St — проекция Mn . Тогда St и Mn , как дуги

кругов, принадлежащих равным центральным углам (§ 4), относятся к радиусам, т. е. как Ss к Mm . Затем угол $mMn = sSt = 90^\circ$, а потому треугольники Mmn и Sst подобны. Отсюда следует, что любой элемент дуги шара mn имеет наклон к меридиану, проходящему через его конец m , под таким же углом, как проекция mn к проекции меридиана, и что отношение дуги отрезка mn к ее проекции не зависит от названного угла, т. е. от направления mn . Отсюда получается, что где бы то ни было расположенный бесконечно малый сферический треугольник подобен своей проекции; и, наконец, это справедливо для любого элемента поверхности, так как она может быть разложена на треугольники.

11) К § 6. Равенство углов ECS и GCM непосредственно следует из того, что линия SC — касательная к кругу CM в точке C . На том же основании для SC справедлива формула § 3.

У Эйлера на рис. 5 отсутствует прямая линия CS и вообще в этом рисунке пришлось сделать много изменений. Вместо «отнесенная к меридиану GC , принятому за начальный» в оригинале стоит «longitudinem loci M in Meridiano GC » — долготу места M на меридиане GC .

12) К § 14. Не только все большие круги на шаре изображаются на проекции в виде окружностей, но в виде окружностей изображаются любые круги, проведенные на шаре. Это просто следует из того, что изображения параллелей оказываются окружностями при любом положении параллелей на шаре относительно полюса.

13) К § 20. Искажение, о котором здесь говорится, получается вследствие того, что во всех точках, которые недалеко отстоят одна от другой, линейный масштаб очень мало изменяется.

К статье III

14) К § 2. При сказанном здесь подразумевается заранее, что дело идет о так называемой стереографической экваториальной проекции, у которой точка, где находится глаз, лежит на экваторе, следовательно, проекция пригодна для изображения восточного и западного полушария. Эйлер в § 1 рассматривает стереографическую проекцию, у которой точка, где находится глаз, лежит в любом месте.

15) К § 7. Нет надобности заменять дуги окружности PQ , QR прямыми линиями; пропорция в § 8 строго справедлива и для дуг окружностей.

Проекция, о которой идет речь, получается следующим образом.

Чтобы изобразить пояс шара, ограниченный параллелями, проходящими через точки A и B , и часть этого пояса, вообразим прямой секущий конус, который проходит через параллели в точках A и B , и перенесем пояс шара на поверхность такого конуса, так чтобы меридианам шара соответствовали на конусе прямые линии, а всем параллелям на шаре соответствовали параллельно проходящие круги на конусе. Параллели на шаре P и Q изобразятся сами собой; каждая другая параллель шара изобразится на конусе таким кругом, расстояние которого от вершины конуса O равно расстоянию от полюса соответствующего круга на шаре, умноженному на известную постоянную величину. После этого развертывают поверхность конуса на плоскости.

16) К § 10. Уравнение

$$\omega = \frac{Pp}{PO}$$

дает нам угол ω в радиальной мере, но если выразить ω в градусах, то

$$\frac{Pp}{PO} = \alpha \omega,$$

где $\alpha = \frac{1}{180} \pi = 0,017\,453\,29$, т. е. получается

$$\alpha \omega = \frac{\delta (\cos p - \cos q)}{q - p} \text{ или } \omega = \frac{\delta (\cos p - \cos q)}{\alpha (q - p)}.$$

В приведенном значении для ω вместо $6''$ лучше поставить $5''$.

17) К § 15. К положению, что наибольшая ошибка лежит на середине, приходим на основании следующего рассуждения.

Пусть $f(x)$ — ошибка на широте x ; в таком случае мы знаем, что $f(x)$ превращается в нуль для $x = p$ и $x = q$. Этому условию удовлетворяет функция

$$f(x) = m(x - p)(x - q)$$

Величина m также может быть функцией от x ; для простоты примем, что m — постоянная величина. Тогда $f(x) = 0$ для $x = \frac{1}{2}(p + q)$. Затем ошибки в A и B должны быть равны; в таком случае

$$m(a - p)(a - q) = m(b - p)(b - q),$$

откуда следует

$$a + b = p + q,$$

т. е. максимальная ошибка находится в точке $x = \frac{1}{2}(a + b)$. Из приведенной выше формулы для $f(x)$ непосредственно следует, что ошибка в точке $x = \frac{1}{2}(a + b)$ имеет знак противоположный, чем в точках $x = a$ и $x = b$.

Когда допущение, сделанное относительно $f(x)$, не вполне соответствует точности, то оно является первым приближением к ней. Об остальном см. в § 18 и последующих.

18) К § 18. Угол x выражен в градусах; для него поэтому существует такое отношение дуги к радиусу $x' = \alpha x$. Чтобы можно было применить обычные аналитические формулы, нужно писать $\cos x'$ вместо $\cos x$. Тогда, очевидно, получится

$$d \cos x' = -\sin x' dx' = -\sin x' \cdot \alpha dx,$$

и вместо $\sin x'$ опять появляется $\sin x$.

Значение x точнее равно $x = 54^\circ 4' 7''$.

19) К § 19. Более точные значения будут

$$z = 4^\circ 53' 5''; \quad \omega = 48^\circ 35''.$$

20) К § 20 и § 21. Принятое здесь значение $\alpha\omega$ — не точное, лучше взять $\alpha\omega = 0,014134$. С помощью его и более точного значения z (примечание 19) получается ошибка 0,00980 вместо 0,00946. Поэтому слегка изменятся числа, приведенные дальше. Действительная длина одного градуса равна: на параллели A ... 0,77584; ошибка здесь равна 0,147 мили; на параллели B ошибка равна $\frac{1}{35}$ части длины.

В § 21 следует изменить данные там числа соответственно с приведенными в примечаниях 19 и 20.

21) К § 22. На основании того, что меридианы — прямые линии, можно только вывести заключение, что большие круги, проходящие вблизи от какого-нибудь меридиана, — почти прямые линии. Замену изображений любых больших кругов прямыми линиями или окружностями, как это говорится в последующих параграфах, можно рассматривать только как очень грубое приближение. Эйлер не рассматривает вопроса, какие при этом получаются в действительности отклонения. Эти отклонения можно получить следующим образом. Уравнение большого круга, перпендикулярного меридиану $t = 0$, и пересекающего его на широте u_0 , будет

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} u_0 \cos t. \quad (1)$$

Чтобы получить на карте кривую линию, изображающую этот круг, вообразим точки на карте, определяемые полярными координатами ρ , ϑ , полюс находится в точке O . Приняв тогда длину одного градуса меридиана за единицу, получаем

$$\rho = 90^\circ - u + z, \quad \vartheta = \omega t, \quad (2)$$

где ω выражена в частях градуса, т. е. $\omega = 0,809\,83$. Поэтому изображение большого круга (1) выразится уравнением

$$\operatorname{tg}(90^\circ + z - \rho) = \operatorname{tg}(90^\circ + z - \rho_0) \cos \frac{\vartheta}{\omega}. \quad (3)$$

С другой стороны, перпендикуляр к меридиану $t = 0$ на широте u_0 определяется уравнением

$$\rho = \frac{\rho_0}{\cos \vartheta}. \quad (4)$$

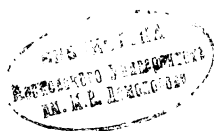
Сравнение значений ρ для различных ϑ , определяемых уравнениями (3) и (4), дает отклонения кривой (3) от прямой (4).

22) К § 23. Эйлер говорит «полюс» вместо точки пересечений. Это выражение неправильное, потому что под полюсом круга на шаре понимают нечто другое.

23) К § 24. Не доказано, что вдоль FG не имеется искажений. Если даже FG почти равно 90° , следовательно, почти равно длине соответствующей дуги на шаре, из этого еще не следует, что равные отрезки FG всегда соответствуют равным дугам окружности шара.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Леонард Эйлер	5
I Об изображении поверхности шара на плоскости	20
II. О географической проекции поверхности шара	49
III. О географической проекции Делиля, примененной на генеральной карте Российской Империи	63
Примечания	73



Автор Леонард Эйлер

Редактор изд-ва Ф. И. Хромченко	Техн. редактор В. В. Романова Корректор В. А. Григорьева
---------------------------------	---

Т—03366	Сдано в набор 22/X 1958 г.	Подп. к печати 21/III 1959 г.
Формат бумаги 70×108 ¹ / ₁₆	Бум. л. 2,63. Печ. листов 5,25. Усл.-печ. л. 7,2	

Уч.-изд. лист. 4,1	Тираж 4000 экз. Зак. № 798
--------------------	----------------------------

Цена 2 р. 90 к. + кол. переплет 1 р. 50 коп., бум. лед. переплет 1 р. 25 к.

Типография Рижской картфабрики

КОНТРОЛЕР №

При обнаружении дефекта, просьба
возвратить книгу вместе с ярлыком для
обмена по адресу: гор. Рига, Б. Алто-
навас, д. № 43. Картографическая
фабрика

Расходы по пересылке возмещаются фабрикой.

3ME

D-322

Here I hope to find